

Cvičení 8

Základní vlastnosti funkcí

1) Rozhodněte, zda jsou následující funkce rostoucí nebo klesající event. kde:

$$f(x) = x^2 \quad f(x) = x^3 \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = e^{-x}$$

2) Ukažte, že pro libovolnou funkci f definovanou na intervalu $(-a, a)$, $a > 0$ platí, že

$$f(x) + f(-x) \text{ je sudá a } f(x) - f(-x) \text{ je lichá funkce.}$$

3) Zjistěte, které z uvedených funkcí jsou sudé resp. liché:

$$\text{a) } f(x) = 2 \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{c) } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{d) } f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$$

4) Zjistěte, které z následujících funkcí jsou periodické, a najděte jejich periodu.

$$\text{a) } f(x) = \cos 3x \quad \text{b) } f(x) = 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{c) } f(x) = 3 \cos 3x - 5 \sin 2x$$

5) Zjistěte, které z následujících funkcí jsou prosté, a k těm, které jsou prosté, najděte inverzní funkce:

$$\text{a) } f(x) = (x-2)(x+2) \quad \text{b) } f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^3}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{x^3+1}$$

$$\text{d) } f(x) = 2^{1+\ln\sqrt{x-2}} \quad \text{e) } f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

Transformace grafů

6) Pomocí grafu funkce $y = 2x$ nakreslete grafy funkcí

$$f(x) = |2x|, \quad g(x) = 2(x+2), \quad h(x) = 2x-5, \quad k(x) = 2(x-3)+1.$$

7) Pomocí grafu funkce $f(x) = x^2$ nakreslete grafy funkcí

$$f(x) = (x-2)^2 + 3, \quad g(x) = x^2 + 2x, \quad h(x) = \left||x+1|^2 - 3\right|$$

8) Nakreslete graf funkce $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

9) Pomocí grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ nakreslete grafy funkcí

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x+1}, \quad h(x) = -\frac{1}{x-1}, \quad k(x) = \frac{1}{x-1} - 1.$$

10) Nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$.

Pro dané funkce určete $|f(x)|$, $f(|x|)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $2f(x)$, $f(2x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $2f(1-x)+1$:

$$11) f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{-1, 0\} \\ 0 & x \in (-1, 0) \\ -x & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} x+2 & x \in \langle -2, -1 \rangle, \\ x & x \in (-1, 0), \\ 1-x & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -1 & x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

13) Je dána funkce $f(x) = \sin x (\cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x)$. Nakreslete

$$f(x), |f(x)|, f(|x|), 2f(x), \frac{1}{2}f(x), f\left(\frac{x}{2}\right), f(x)+1, f(x)-2, f\left(x+\frac{\pi}{3}\right), f\left(2x-\frac{\pi}{2}\right).$$