Lineární Programování a Simplexová Metoda

Veronika Čalkovská, Tomáš Kocí

November 28, 2024

Snaha o maximalizaci nebo minimalizaci tzv. účelové funkce za podmínek, které jsou vyjádřeny lineárními nerovnicemi.

Proč nás to zajímá?

- Zvýšení prestiže FITu
- Často se vyskytující problém
- Dá se obohatit o fuzzy čísla

Účelová funkce

$f(x) = c^T x$

Podmínky

$Ax \leq b$

Implicitní podmínka

$x \geq 0$

- x je vektor proměnných
- c je vektor koeficientů účelové funkce
- A je matice koeficientů podmínek
- b je vektor pravých stran podmínek

Maximalizovat $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Farmář má:

- 3t brambor
- 4t mrkve
- 5t hnojiva (potřeba použít 1:1)

Ceny produktů:

- 1kg brambor = 25Kč
- 1kg mrkve = 30Kč

Proměnné

x_1 ... kg brambor, x_2 ... kg mrkve

Účelová funkce

$f(x) = 25x_1 + 30x_2$

Podmínky

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 5000 \\
x_1 &\leq 3000 \\
x_2 &\leq 4000
\end{aligned}
$$

Implicitní podmínky

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Možnosti řešení:

- Metoda kouknu a vidím
- Grafický přístup
- Simplexová metoda

Jak moc nám uškodí třetí rostlina, co by farmář pěstoval?

Proměnné

x_1 ...kg brambor, x_2 ...kg mrkve, x_3 ...kg dýně

Účelová funkce

$f(x) = 25x_1 + 30x_2 + 40x_3$

Podmínky

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5000 \\
x_1 &\leq 3000 \\
x_2 &\leq 4000 \\
x_3 &\leq 2000
\end{aligned}
$$

Simplexová metoda

- Pro řešení úloh lineárního programování
- Optimální řešení se nachází na hraně přípustné oblasti
- Iterace

Princip

1. Nalezení počátečního bázového řešení
2. Je optimální? $\rightarrow$ konec
3. Hledání způsobu zlepšení účelové funkce
4. Transformace řešení

Příklad

$MAX \ 25x_1 + 30x_2$

Účelová funkce

$$F = 25x_1 + 30x_2$$
$$F - 25x_1 - 30x_2 = 0$$

Příklad

Podmínky

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3000 \\ x_2 &\leq 4000 \\ x_1 + x_2 &\leq 5000 \end{aligned}$$

Příklad

Volné proměnné

$$
\begin{aligned}
x_1 &\leq 3000 \\
x_2 &\leq 4000 \\
x_1 + x_2 &\leq 5000
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + s_1 &= 3000 \\
x_2 + s_2 &= 4000 \\
x_1 + x_2 + s_3 &= 5000
\end{aligned}
$$

Příklad

Tabulka

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	1	0	0	1	0	5000
-25	-30	0	0	0	1	0

Příklad

Tabulka

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	1	0	0	1	0	5000
-25	-30	0	0	0	1	0

Příklad

Tabulka

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	1	0	0	1	0	5000
-25	-30	0	0	0	1	0

Příklad

Transformace

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	0	0	-1	1	0	1000
-25	-30	0	0	0	1	0

Příklad

Transformace

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	0	0	-1	1	0	1000
-25	0	0	30	0	1	120000

Příklad

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	0	0	-1	1	0	1000
-25	0	0	30	0	1	120000

Příklad

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	0	0	-1	1	0	1000
-25	0	0	30	0	1	120000

Příklad

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
1	0	1	0	0	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	0	0	-1	1	0	1000
-25	0	0	30	0	1	120000

Příklad

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	c
0	0	1	1	-1	0	3000
0	1	0	1	0	0	4000
1	0	0	-1	1	0	1000
0	0	0	5	25	1	145000

Příklad

Účelová funkce

$$5s_2 + 35s_3 + Z = 145000$$
$$\Downarrow$$
$$Z = 145000 - 5s_2 - 35s_3$$

Řešení

$$145000 = 25x_1 + 30x_2$$

$$145000 = 25 \times 1000 + 30 \times 4000$$

Princip duality

- Řešení problémů minimalizace
- Ke každému minimalizačnímu problému existuje korespondující duální problém
- Problém maximalizace

Děkujeme za pozornost

Jestli jsou dotazy, tak pokládat nyní.