Fuzzy implikácie

Kvázi tím

17. októbra 2024

Obsah

Metriky pre fuzzy čísla

Vlastnosti metrík

- nezápornosť
- identita
- symetria
- trojuholníková nerovnosť

Metriky pre fuzzy čísla

Hausdorffova vzdialenosť

$$D(A,B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|a_1(\alpha) - b_1(\alpha)|, |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)|\}$$

Metriky pre fuzzy čísla

Hausdorffova vzdialenosť

$$D(A,B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|a_1(\alpha) - b_1(\alpha)|, |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)|\}$$

Zjednodušene pre symetrické trojuholníkové fuzzy čísla:

$$D(A,B) = |a - b| + |\alpha - \beta|$$

$$D(A,B) = |a - b|$$

Metriky pre fuzzy čísla

Hausdorffova vzdialenosť

$$D(A,B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|a_1(\alpha) - b_1(\alpha)|, |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)|\}$$

Zjednodušene pre symetrické trojuholníkové fuzzy čísla:

$$D(A,B) = |a - b| + |\alpha - \beta|$$

$$D(A,B) = |a - b|$$

Pomocná veta

Nech a, b, c, d sú fuzzy čísla, potom:

$$D(a + c, b + d) \leq D(a,b) + D(c,d)$$

$$D(a - c, b - d) \leq D(a,b) + D(c,d)$$

Metriky pre fuzzy čísla

C_∞ vzdialenosť

$$C_\infty(A, B) = \sup\{|A(u) - B(u)| : u \in \mathbb{R}\}$$

$$0 \leq C_\infty(A, B) \leq 1$$

Metriky pre fuzzy čísla

C_∞ vzdialenosť

$$C_\infty(A, B) = \sup\{|A(u) - B(u)| : u \in \mathbb{R}\}$$

$$0 \leq C_\infty(A, B) \leq 1$$

Euklidovská vzdialenosť

$$E(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \nu_i)^2}$$

Metriky pre fuzzy čísla

Hammingova vzdialenosť

$$H(A, B) = \int_X |A(x) - B(x)| \, \mathrm{d}x$$

Metriky pre fuzzy čísla

Hammingova vzdialenosť

$$H(A, B) = \int_X |A(x) - B(x)| \, \mathrm{d}x$$

Diskrétna Hammingova vzdialenosť

$$H(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i - \nu_i|$$

Usporiadanie pomocou α-rezov

Porovnateľné fuzzy čísla

$$a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2 \Rightarrow A \leq B$$

$$a_1 \geq b_1 \wedge a_2 \geq b_2 \Rightarrow A \geq B$$

Usporiadanie pomocou α-rezov

Porovnateľné fuzzy čísla

$$a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2 \Rightarrow A \leq B$$

$$a_1 \geq b_1 \wedge a_2 \geq b_2 \Rightarrow A \geq B$$

Neporovnateľné fuzzy čísla

Ak existuje $\alpha \in [0,1]$, pre ktoré platí $a_1(\alpha) \leq b_1(\alpha) \wedge a_2(\alpha) \geq b_2(\alpha)$, tak neplatí ani $A \leq B$, ani $A \geq B$.

Metóda číselnej charakteristiky

Aproximácia pomocou integrálu

$$A \leq B \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha \leq \int\limits_0^1 \alpha(b_1(\alpha) + b_2(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha$$

$[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, $[B]^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ a $\alpha \in [0, 1]$

Stredná hodnota fuzzy čísla

Interval strednej hodnoty

$$M(A) = [M_*(A), M^*(A)]$$

$$M(A + B) = M(A) + M(B)$$

$$M(\lambda A) = \lambda M(A)$$

Stredná hodnota fuzzy čísla

Interval strednej hodnoty

$$M(A) = [M_*(A), M^*(A)]$$

$$M(A+B) = M(A) + M(B)$$

$$M(\lambda A) = \lambda M(A)$$

Ostrá stredná hodnota

$$\bar{M}(A) = \frac{M_*(A) + M^*(A)}{2}$$

$$\bar{M}(A+B) = \bar{M}(A) + \bar{M}(B)$$

$$\bar{M}(\lambda A) = \lambda \bar{M}(A)$$

Ťažisko fuzzy čísel

Všeobecne:

$$T(A) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(x)x \, \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(x) \, \mathrm{d}x}$$

Ťažisko fuzzy čísel

Všeobecne:

$$T(A) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(x)x \, \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(x) \, \mathrm{d}x}$$

Pre trojuholníkové fuzzy číslo $A = (a, \alpha, \beta)$:

$$T(A) = \frac{a + \alpha + \beta}{3}$$

Definícia fuzzy implikácií

Fuzzy implikáciou je každá funkcia $I :< 0, 1 >^2 \rightarrow < 0, 1 >$, pre ktorú platí:

- $I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1$,
- $I(1, 0) = 0$,
- je nerastúca v prvom argumente a neklesajúca v druhom argumente.

Od klasických k fuzzy implikáciám

Klasická implikácia:

- $p \Rightarrow q$,
- $\neg p \vee q$,
- $\neg p \vee (p \wedge q)$.

Od klasických k fuzzy implikáciám

Klasická implikácia:

- $p \Rightarrow q$,
- $\neg p \vee q$,
- $\neg p \vee (p \wedge q)$.

Fuzzy implikácia:

- $I(x, y)$,
- $S(n(x), y)$,
- $S(n(x), T(x, y))$.

Od klasických k fuzzy implikáciám

Klasická implikácia:

- $p \Rightarrow q$,
- $\neg p \vee q$,
- $\neg p \vee (p \wedge q)$.

Fuzzy implikácia:

- $I(x, y)$,
- $S(n(x), y)$,
- $S(n(x), T(x, y))$.

Poznámka:

- t-norma T,
- t-konorma S,
- fuzzy negácia n.

S-implikácie

Všeobecný predpis

$$I_S(x, y) = S(n(x), y), \qquad (x, y) \in < 0, 1 >^2$$

S-implikácie

Všeobecný predpis

$$I_S(x,y) = S(n(x),y), \qquad (x,y) \in <0,1>^2$$

Kleene-Dienesova implikácia (maximová t-konorma)

$$I_{S_M}(x,y) = max(1-x,y)$$

S-implikácie

Všeobecný predpis

$$I_S(x, y) = S(n(x), y), \qquad (x, y) \in < 0, 1 >^2$$

Kleene-Dienesova implikácia (maximová t-konorma)

$$I_{S_M}(x, y) = max(1 - x, y)$$

Reichenbachova implikácia (t-konorma pravdepodobnostného súčtu)

$$I_{S_P}(x, y) = (1 - x) + y - (1 - x)y = 1 - x + xy$$

S-implikácie

Všeobecný predpis

$$I_S(x,y) = S(n(x),y), \qquad (x,y) \in <0,1>^2$$

Kleene-Dienesova implikácia (maximová t-konorma)

$$I_{S_M}(x,y) = max(1-x,y)$$

Reichenbachova implikácia (t-konorma pravdepodobnostného súčtu)

$$I_{S_P}(x,y) = (1-x) + y - (1-x)y = 1 - x + xy$$

Łukasiewiczova implikácia (Łukasiewiczova t-konorma)

$$I_{S_L}(x,y) = min(1, 1-x+y)$$

Q-implikácie

Všeobecný predpis

$$I^{Q}_{S,T}(x,y) = S(n(x), T(x,y)), \qquad (x,y) \in < 0,1 >^2$$

Q-implikácie

Všeobecný predpis

$$I^{Q}_{S,T}(x,y) = S(n(x), T(x,y)), \qquad (x,y) \in < 0, 1 >^2$$

Zadehova implikácia (minimová t-norma, maximová t-konorma)

$$I_Z(x,y) = max(1 - x, min(x,y))$$

Reziduálne implikácie (R-implikácie)

Všeobecný predpis

$$I_T(x, y) = sup\{z \in < 0, 1 >; T(x, z) \leq y\}, \qquad (x, y) \in < 0, 1 >^2$$

Reziduálne implikácie (R-implikácie)

Všeobecný predpis

$$I_T(x,y) = sup\{z \in < 0,1 >; T(x,z) \leq y\}, \qquad (x,y) \in < 0,1 >^2$$

Gödelova implikácia (minimová t-norma)

$$I_{T_M}(x,y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & x > y \end{cases}$$

Reziduálne implikácie (R-implikácie)

Všeobecný predpis

$$I_T(x, y) = sup\{z \in < 0, 1 >; T(x, z) \leq y\}, \qquad (x, y) \in < 0, 1 >^2$$

Gödelova implikácia (minimová t-norma)

$$I_{T_M}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & x > y \end{cases}$$

Goguenova implikácia (súčinová t-norma)

$$I_{T_P}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ \frac{y}{x} & x > y \end{cases} = min\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Reziduálne implikácie (R-implikácie)

Všeobecný predpis

$$I_T(x,y) = sup\{z \in < 0,1 >; T(x,z) \leq y\}, \qquad (x,y) \in < 0,1 >^2$$

Gödelova implikácia (minimová t-norma)

$$I_{T_M}(x,y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & x > y \end{cases}$$

Goguenova implikácia (súčinová t-norma)

$$I_{T_P}(x,y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ \frac{y}{x} & x > y \end{cases} = min\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Łukasiewiczova implikácia (Łukasiewiczova t-norma)

$$I_{T_L}(x,y) = min(1, 1 - x + y)$$

T-implikácie

Všeobecný predpis

$$I(x, y) = T(x, y), \qquad (x, y) \in < 0, 1 >^2$$

T-implikácie

Všeobecný predpis

$$I(x, y) = T(x, y), \qquad (x, y) \in < 0, 1 >^2$$

- Nespĺňajú podmienky implikácií, ale používajú sa v technickej praxi.

T-implikácie

Všeobecný predpis

$$I(x, y) = T(x, y), \qquad (x, y) \in < 0, 1 >^2$$

- Nesplĺňajú podmienky implikácií, ale používajú sa v technickej praxi.

Mamdaniho implikácia (minimová t-norma)

$$I_{Mamdani}(x, y) = T_M(x, y) = min(x, y)$$

T-implikácie

Všeobecný predpis

$$I(x, y) = T(x, y), \qquad (x, y) \in <0, 1>^2$$

- Nesplĺňajú podmienky implikácií, ale používajú sa v technickej praxi.

Mamdaniho implikácia (minimová t-norma)

$$I_{Mamdani}(x, y) = T_M(x, y) = min(x, y)$$

Larsenova implikácia (súčinová t-norma)

$$I_{Larsen}(x, y) = T_P(x, y) = xy$$

Lingvistická (jazyková) premenná

Lingvistická premenná je charakterizovaná päticou $(X, T(X), \mathbb{X}, G, \mathcal{M})$.

- X – meno premennej,
- $T(X)$ – množina slovných hodnôt premennej,
- $\mathbb{X}$ – univerzum hodnôt premennej,
- G – gramatika obsahujúca syntaktické pravidlá vytvárania hodnôt,
- $\mathcal{M} : T(X) \to \mathcal{F}(\mathbb{X})$ – sémantické pravidlo, definuje význam slovnej hodnoty.