Úvod do Fuzzy Logiky

Pôžitkári Fuchsa

3. októbra 2024

Obsah

Klasická vs Fuzzy logika

Klasická vs Fuzzy logika

- Nech $\mathbb{X}$ je základná množina prvkov

Klasická vs Fuzzy logika

- Nech $\mathbb{X}$ je základná množina prvkov *Universum discursu*

Klasická vs Fuzzy logika

- Nech $\mathbb{X}$ je základná množina prvkov *Universum discursu*
- Nech A: $A \subseteq \mathbb{X}$

Klasická vs Fuzzy logika

- Nech $\mathbb{X}$ je základná množina prvkov *Universum discursu*
- Nech A: $A \subseteq \mathbb{X}$

Klasická logika: Charakteristická funkcia

$$\chi_A : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$$

Klasická vs Fuzzy logika

- Nech $\mathbb{X}$ je základná množina prvkov *Universum discursu*
- Nech A: $A \subseteq \mathbb{X}$

Klasická logika: Charakteristická funkcia

$$\chi_A : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$$

Fuzzy logika: Funkcia príslušnosti

$$\mu_A : \mathbb{X} \to [0, 1]$$

Klasická vs Fuzzy logika

- Nech $\mathbb{X}$ je základná množina prvkov *Universum discursu*
- Nech A: $A \subseteq \mathbb{X}$

Klasická logika: Charakteristická funkcia

$$\chi_A : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$$

Fuzzy logika: Funkcia príslušnosti

$$\mu_A : \mathbb{X} \to [0, 1]$$
$$A = \{(x, \mu_A(x)) \,|x \in \mathbb{X}\}$$

Klasická vs Fuzzy logika

- Nech $\mathbb{X}$ je základná množina prvkov *Universum discursu*
- Nech A: $A \subseteq \mathbb{X}$

Klasická logika: Charakteristická funkcia

$$\chi_A : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$$

Fuzzy logika: Funkcia príslušnosti

$$\mu_A : \mathbb{X} \to [0, 1]$$
$$A = \{(x, \mu_A(x)) \,|x \in \mathbb{X}\}$$

Pozn.:

- $A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$
- $A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \ldots, \mu_A(x_n)/x_n\}$

Príklad fuzzy množiny

Príklad fuzzy množiny

Rozumný čas ísť do postele

Príklad fuzzy množiny

Rozumný čas ísť do postele

- $\mathbb{X} = [20, 24]$

Príklad fuzzy množiny

Rozumný čas ísť do postele

- $\mathbb{X} = [20, 24]$
- $$\mu_{\check{C}DP}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [20, 21[\\ & \\ & \end{cases}$$

Príklad fuzzy množiny

Rozumný čas ísť do postele

- $\mathbb{X} = [20, 24]$
- $$\mu_{\check{C}DP}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [20, 21[\\ (x-21)^2 & \text{ak } x \in [21, 22[\\ & \end{cases}$$

Príklad fuzzy množiny

Rozumný čas ísť do postele

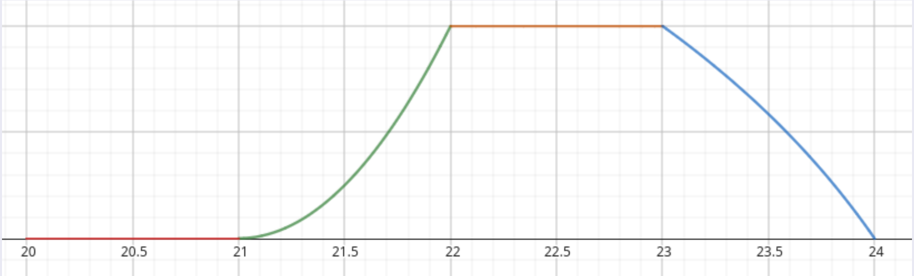
- $\mathbb{X} = [20, 24]$
- $$\mu_{ČDP}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [20, 21[\\ (x-21)^2 & \text{ak } x \in [21, 22[\\ 1 & \text{ak } x \in [22, 23[\end{cases}$$

Príklad fuzzy množiny

Rozumný čas ísť do postele

- $\mathbb{X} = [20, 24]$
- $$\mu_{\check{C}DP}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [20, 21[\\ (x-21)^2 & \text{ak } x \in [21, 22[\\ 1 & \text{ak } x \in [22, 23[\\ \log_2(-x+25) & \text{ak } x \in [23, 24] \end{cases}$$

Graf ČDP



Opakovanie pojmov

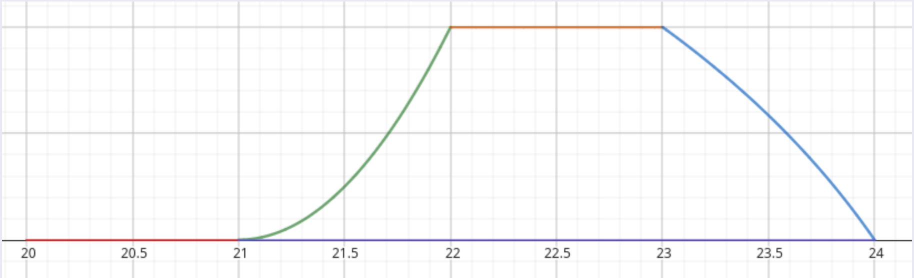
Nosič (Support)

Nosič (Support)

$$supp\,(A) = \{x \in \mathbb{X} \,|\, \mu_A\,(x) > 0\}$$

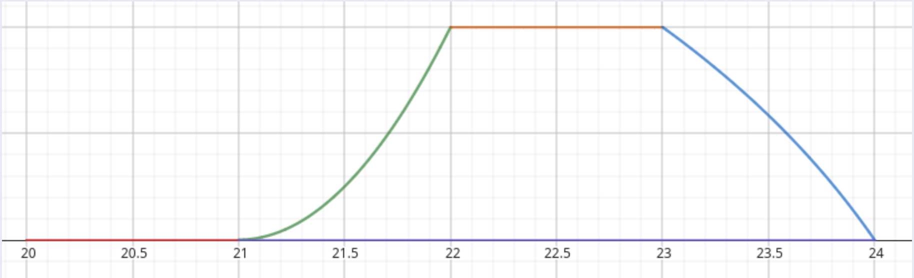
Nosič (Support)

$$supp\,(A) = \{x \in \mathbb{X} \,|\, \mu_A\,(x) > 0\}$$



Nosič (Support)

$$supp\,(A) = \{x \in \mathbb{X} \,|\, \mu_A\,(x) > 0\}$$



$$supp\,(\check{C}DP) = \,]21, 24[$$

Výška (height)

$$hgt(A) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x)$$

Výška (height)

$$hgt(A) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x)$$

α-rez

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} & \text{ak } \alpha > 0 \\ cl(supp(A)) & \text{ak } \alpha = 0 \end{cases}$$

Výška (height)

$$hgt(A) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x)$$

α-rez

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{X} \,|\, \mu_A(x) \geq \alpha\} & \text{ak } \alpha > 0 \\ cl(supp(A)) & \text{ak } \alpha = 0 \end{cases}$$

- $cl(supp(A)) = A \cup \bar{A} = \mathbb{X}$

Výška (height)

$$hgt(A) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x)$$

α-rez

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} & \text{ak } \alpha > 0 \\ cl(supp(A)) & \text{ak } \alpha = 0 \end{cases}$$

- $cl(supp(A)) = A \cup \bar{A} = \mathbb{X}$

Jadro

$$ker(A) = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) = 1\}$$

Výška (height)

$$hgt(A) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x)$$

α-rez

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} & \text{ak } \alpha > 0 \\ cl(supp(A)) & \text{ak } \alpha = 0 \end{cases}$$

- $cl(supp(A)) = A \cup \bar{A} = \mathbb{X}$

Jadro

$$ker(A) = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) = 1\}$$

- $ker(A) = [A]^1$

Výška (height)

$$hgt(A) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x)$$

α-rez

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} & \text{ak } \alpha > 0 \\ cl(supp(A)) & \text{ak } \alpha = 0 \end{cases}$$

- $cl(supp(A)) = A \cup \bar{A} = \mathbb{X}$

Jadro

$$ker(A) = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) = 1\}$$

- $ker(A) = [A]^1$
- $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ - systém všetkých fuzzy množín

Fuzzy čísla

Vlastnosti Fuzzy čísel

Vlastnosti Fuzzy čísel

- Nech A je fuzzy číslo
- $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$

Vlastnosti Fuzzy čísel

- Nech A je fuzzy číslo
- $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$

Normálnosť

Vlastnosti Fuzzy čísel

- Nech A je fuzzy číslo
- $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$

Normálnosť

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \mu_A(x_0) = 1$$

Vlastnosti Fuzzy čísel

- Nech A je fuzzy číslo
- $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$

Normálnosť

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \mu_A(x_0) = 1$$

Konvexnosť

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1] :$$

Vlastnosti Fuzzy čísel

- Nech A je fuzzy číslo
- $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$

Normálnosť

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \mu_A(x_0) = 1$$

Konvexnosť

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1] :$$
$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

Vlastnosti Fuzzy čísel

- Nech A je fuzzy číslo
- $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$

Normálnosť

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \mu_A(x_0) = 1$$

Konvexnosť

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1] :$$
$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

Limitná podmienka

$$\lim_{t \to \infty} \mu_A(x) = 0 \qquad \lim_{t \to -\infty} \mu_A(x) = 0$$

Trianguláre fuzzy číslo

Trianguláre fuzzy číslo

- Nech $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ je trianguláre fuzzy číslo

Trianguláre fuzzy číslo

- Nech $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ je trianguláre fuzzy číslo

Definícia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & \text{ak } a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 - \frac{x-a}{\beta} & \text{ak } a \leq x \leq a + \beta \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Triangulárne fuzzy číslo

- Nech $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ je triangulárne fuzzy číslo

Definícia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & \text{ak } a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 - \frac{x-a}{\beta} & \text{ak } a \leq x \leq a + \beta \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Hovoríme, že A má vrchol v a
- Často zapisované ako: $A = (a, \alpha, \beta)$

Lichobežníkové fuzzy číslo

Lichobežníkové fuzzy číslo

- Nech $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ je lichobežníkové fuzzy číslo

Lichobežníkové fuzzy číslo

- Nech $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ je lichobežníkové fuzzy číslo

Definícia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & \text{ak } a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 & \text{ak } a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-b}{\beta} & \text{ak } a \leq x \leq b + \beta \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Lichobežníkové fuzzy číslo

- Nech $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ je lichobežníkové fuzzy číslo

Definícia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & \text{ak } a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 & \text{ak } a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-b}{\beta} & \text{ak } a \leq x \leq b + \beta \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Hovoríme, že A má vrchol medzi a a b
- Často zapisované ako: $A = (a, b, \alpha, \beta)$

LR fuzzy čísla

LR fuzzy čísla

- Akékoľvek fuzzy číslo $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ vie byť opísané:

LR fuzzy čísla

- Akékoľvek fuzzy číslo $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ vie byť opísané:

LR - definícia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & \text{ak } x \in [a-\alpha, a] \\ 1 & \text{ak } x \in [a, b] \\ R(\frac{x-b}{\beta}) & \text{ak } x \in [b, b+\beta] \\ 0 & \textit{inak} \end{cases}$$

LR fuzzy čísla

- Akékoľvek fuzzy číslo $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ vie byť opísané:

LR - definícia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & \text{ak } x \in [a-\alpha, a] \\ 1 & \text{ak } x \in [a, b] \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right) & \text{ak } x \in [b, b+\beta] \\ 0 & \textit{inak} \end{cases}$$

- Hovoríme, že $[a, b]$ je vrchol A

Tvarovacie funkcie L a R

Tvarovacie funkcie L a R

- $f : [0,1] \to [0,1]\,, \forall f \in \{L, R\}$
- spojité
- nerastúce

Tvarovacie funkcie L a R

- $f : [0,1] \to [0,1]\,, \forall f \in \{L, R\}$
- spojité
- nerastúce
- $L(0) = R(0) = 1$

Tvarovacie funkcie L a R

- $f : [0,1] \rightarrow [0,1], \forall f \in \{L, R\}$
- spojité
- nerastúce
- $L(0) = R(0) = 1$
- $R(1) = L(1) = 0$

Tvarovacie funkcie L a R

- $f : [0,1] \to [0,1] \,, \forall f \in \{L, R\}$
- spojité
- nerastúce
- $L(0) = R(0) = 1$
- $R(1) = L(1) = 0$

- Zapisujeme $A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$

Tvarovacie funkcie L a R

- $f : [0,1] \rightarrow [0,1]\,, \forall f \in \{L, R\}$
- spojité
- nerastúce
- $L(0) = R(0) = 1$
- $R(1) = L(1) = 0$

- Zapisujeme $A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$
- Pokiaľ $a = b$ zapisujeme $A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$

Tvarovacie funkcie L a R

- $f : [0,1] \to [0,1]\,, \forall f \in \{L, R\}$
- spojité
- nerastúce
- $L\,(0) = R\,(0) = 1$
- $R\,(1) = L\,(1) = 0$

- Zapisujeme $A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$
- Pokiaľ $a = b$ zapisujeme $A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$
- Pokiaľ $L\,(x) = R\,(x) = 1 - x$ zapisujeme $A = (a, b, \alpha, \beta)$

Operácie na fuzzy množinách

Triangulárne normy (t-normy)

- nech T je t-norma

Triangulárne normy (t-normy)

- nech T je t-norma

Definícia t-normy

- $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

Triangulárne normy (t-normy)

- nech T je t-norma

Definícia t-normy

- $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$
- $\forall x, y, z \in [0,1]$ sú splnené axiómy:

• $T(x,y) = T(y,x)$	Komutatívnosť
• $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$	Asociativita
• $y \leq z \implies T(x,y) \leq T(x,z)$	Monotónnosť
• $T(x,1) = x$	Okrajová podmienka

Duálne konormy

- Nech T je t-norma
- Nech S je duálna konorma T

Duálne konormy

- Nech T je t-norma
- Nech S je duálna konorma T

Definícia konormy

- $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$
- $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$

Sľúbené operácie

Sľúbené operácie

Prienik

$$(A \cap B)(x) = \{\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \mid \forall x \in \mathbb{X}\}$$

Sľúbené operácie

Prienik

$$(A \cap B)(x) = \{\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \mid \forall x \in \mathbb{X}\}$$

Zjednotenie

$$(A \cup B)(x) = \{\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \mid \forall x \in \mathbb{X}\}$$

Sľúbené operácie

Prienik

$$(A \cap B)(x) = \{\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \mid \forall x \in \mathbb{X}\}$$

Zjednotenie

$$(A \cup B)(x) = \{\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \mid \forall x \in \mathbb{X}\}$$

Komplement

$$(\neg A)(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in \mathbb{X}$$

Princíp rozšírenia

Princíp rozšírenia

- Nech $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ sú ostré množiny
- Nech $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}; \forall x \in \mathbb{X}, f\left(x\right) = y \in \mathbb{Y}$

Princíp rozšírenia

- Nech $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ sú ostré množiny
- Nech $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}; \forall x \in \mathbb{X}, f(x) = y \in \mathbb{Y}$

Definícia

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{ak } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

kde $f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{X} | f(x) = y\}$

Ďakujeme za pozornosť