Fuzzy multikriteriálne rozhodovanie

Adam Taha, Natália Sobihardová

24.11.2024

Obsah

Priemerujúce operátory

Priemerujúce operátory $\subseteq$ agregačné spojky

- Spojky zjednotenia; max(kompenzácia)
- Spojky prieniku; min(kompenzácia)
- Spojky kompenzácie

Definícia priemerujúcich operátorov

Priemerujúci operátor M je funkcia $M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

- Idempotencia: $M(x,x) = x,\ \forall x \in [0,1]$
- Komutatívnosť: $M(x,y) = M(y,x),\ \forall x,y \in [0,1]$
- Extrémy: $M(0,0) = 0, \quad M(1,1) = 1$
- Monotónnosť: $M(x,y) \leq M(x',y')$ ak $x \leq x'$ a $y \leq y'$
- Spojitosť

Ak M je priemerujúci operátor, potom:

$$\min\{x,y\} \leq M(x,y) \leq \max\{x,y\},\ \forall x,y \in [0,1]$$

Obsah

Nerovnosť AP a GP

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \quad pre \quad x_1, x_2, ..., x_n \in R^+$$

$$\text{podmienka rovnosti:} \quad x_1 = x_2 = ... = x_n$$

Obsah

Kvázi-aritmetický priemer

$$M(a_1, \dots, a_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)$$

Názov	f	$M(x, y)$
Harmonický priemer	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{2xy}{x+y}$
Geometrický priemer	$f(x) = \ln(x)$	$\sqrt{xy}$
Aritmetický priemer	$f(x) = x$	$\frac{x+y}{2}$
Duál geometrického priemeru	$f(x) = -\ln(1-x)$	$1 - \sqrt{(1-x)(1-y)}$
Duál harmonického priemeru	$f(x) = \frac{x}{1-x}$	$\frac{x+y-2xy}{2-x-y}$
Medián	$f(x) =$ indikátor pre kvantil	$\text{med}(x, y, \alpha),\ \alpha \in (0, 1)$
Generalizovaný p-priemer	$f(x) = x^p$	$\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{1/p},\ p \geq 1$

Obsah

OWA operátory

OWA operátory sú definované váženým vektorem
$W = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$

- $w_i \in [0, 1]$
- $w_1 + \ldots + w_n = 1$

OWA operátor je: $F(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j$

kde $b_j = j$-tý najväčší prvok

Špeciálne prípady OWA

- Max OWA: $W = W^* = (1, 0, \ldots, 0)^T$ a $F^*(a_1, \ldots, a_n) = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$
- Min OWA: $W = W_* = (0, 0, \ldots, 1)^T$ a $F_*(a_1, \ldots, a_n) = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$
- Priemer OWA: $W = (1/n, \ldots, 1/n)^T$ a $F_A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$

Andness a Orness

$$\text{orness}(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (n-i) w_i$$

$$\text{andness}(W) = 1 - \text{orness}(W)$$

Disperzia (rozptyl)

$$\mathrm{disp}(W) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \ln(w_i)$$

Vyššia hodnota = rovnomernejšie rozdelenie váh

Kvantifikátor Q

Usmerňuje proces agregácie tým, že špecifikuje, kolko kritérií je potrebné do urč. miery splniť.

- **Regulárne monotónne neklesajúce:** $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$, ale $r_1 > r_2$ tak $Q(r_1) \geq Q(r_2)$
- **Regulárne monotónne nerastúce:** $Q(0) = 1$, $Q(1) = 0$, ale $r_1 < r_2$ tak $Q(r_1) \geq Q(r_2)$
- **Regulárne unimodálne:**

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & \text{pre } r = 0 \\ \text{monotónne rastúce}, & 0 \leq r \leq a \\ 1, & a \leq r \leq b,\ 0 < a < b < 1 \\ \text{monotónne nerastúce}, & b \leq r \leq 1 \\ 0, & r = 1 \end{cases}$$

Váhy pre OWA používajúci Q

Na zistenie váhy pre OWA operátor používajúci kvantifikátor, váhy sa vypočítajú ako:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

Obsah

Získanie maximálnej disperzie váh OWA operátora

Cieľ

$$\text{maximize} \quad disp(W) = -\sum_{i=1}^{n} w_i ln(w_i)$$

$$\text{subject to} \quad orness(W) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \alpha; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Získanie maximálnej disperzie váh OWA operátora

Metóda Lagrangeových multiplikátorov

$$L(W, \lambda_1, \lambda_2) = -\sum_{i=1}^{n} w_i ln(w_i) + \lambda_1(\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i - \alpha) + \lambda_2(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1)$$

Získanie maximálnej disperzie váh OWA operátora

Z prvej podmienky:

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)u_1^{n-i}u_n^{i-1} = \frac{1}{u_1-u_n}\left[(n-1)u_1^n - \sum_{i=1}^{n} u_1^i u_n^{n-i}\right] =$$

$$= \frac{1}{u_1-u_n}\left[(n-1)u_1^n - u_1 u_n \frac{u_1^{n-1}-u_n^{n-1}}{u_1-u_n}\right] =$$

$$= \frac{1}{(u_1-u_n)^2}\left[(n-1)u_1^n(u_1-u_n) - u_1^n u_n + u_1 u_n^n\right] =$$

$$= \frac{1}{(u_1-u_n)^2}\left[(n-1)u_1^{n+1} - nu_1^n u_n + u_1 u_n^n\right]$$

Získanie maximálnej disperzie váh OWA operátora

$$(n-1)u_1^{n+1} - nu_1^n u_n + u_1 u_n^n = (n-1)\alpha(u_1 - u_n)^2$$

$$nu_1^n - u_1 = (n-1)\alpha(u_1 - u_n)$$

$$u_n = \frac{1}{(n-1)\alpha}\left[((n-1)\alpha + 1)u_1 - nu_1^n\right]$$

$$\frac{u_n}{u_1} = \frac{(n-1)\alpha + 1 - nw_1}{(n-1)\alpha} \quad (1)$$

Získanie maximálnej disperzie váh OWA operátora

Z druhej podmienky:

$$\sum_{j=1}^{n} u_1^{n-j} u_n^{j-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{u_1^n - u_n^n}{u_1 - u_n} = 1$$

$$\Leftrightarrow u_1^n - u_n^n = u_1 - u_n \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow u_1^{n-1} - \frac{u_n}{u_1} \times u_n^{n-1} = 1 - \frac{u_n}{u_1} \quad (2)$$

Získanie maximálnej disperzie váh OWA operátora

Prepíšeme (3) ako:

$$u_1^n - u_n^n = u_1 - u_n$$

$$u_1(w_1 - 1) = u_n(w_n - 1)$$

$$w_1(w_1 - 1)^{n-1} = w_n(w_n - 1)^{n-1}$$

$$w_1(w_1 - 1)^{n-1} = \frac{((n-1)\alpha - n)w_1 + 1}{(n-1)\alpha + 1 - nw_1} \times \left[\frac{(n-1)\alpha(w_1 - 1)}{(n-1)\alpha + 1 - nw_1}\right]^{n-1}$$

$$w_1[(n-1)\alpha + 1 - nw_1]^n = ((n-1)\alpha)^{n-1}[((n-1)\alpha - n)w_1 + 1]$$

Obsah

OWA operátory pre výber Ph.D. študentov

- dvojstupňový proces výberu Ph.D. študentov na TUCS
- 3 zložky:
  - množina záujemcov $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$
  - každý expert udeľuje každému žiadateľovi hodnotenie, usporiadanú 6-ticu kritérií ohodnotených na stupnici od 1 do 3 (výborný, priemerný, slabý) $(a_1, ..., a_6), \quad \text{kde } a_i \in \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, ..., 6$
  - každý žiadateľ, teda disponuje usporiadanou 11-ticou hodnotení všetkých expertov $(b_1, ..., b_{11}), \quad \text{kde } b_i \in [1, 3], \quad b_1 < ... < b_{11}$

1. Výpočet celkového hodnotenia záujemcu daným odborníkom

$$\text{agregácia}(a_1, ..., a_6), \quad \text{kde } a_i \in \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, ..., 6$$

- Regular Increasing Monotone (RIM) kvantifikátor Q
- $w_i = Q(\frac{i}{n}) - Q(\frac{i-1}{n}) \quad \text{pre } i = 1, ..., n$
- štandardný level of orness asociovaný s $RIM\ Q$ je rovný ploche pod Q

$$orness(Q) = \int_0^1 Q(r)\, dr$$

OWA operátory pre výber Ph.D. študentov

$$w_1 = \left[\frac{1}{6}\right]^{\alpha} - 0,$$

$$w_2 = \left[\frac{2}{6}\right]^{\alpha} - \left[\frac{1}{6}\right]^{\alpha},$$

$$w_3 = \left[\frac{3}{6}\right]^{\alpha} - \left[\frac{2}{6}\right]^{\alpha},$$

$$w_4 = \left[\frac{4}{6}\right]^{\alpha} - \left[\frac{3}{6}\right]^{\alpha},$$

$$w_5 = \left[\frac{5}{6}\right]^{\alpha} - \left[\frac{4}{6}\right]^{\alpha},$$

$$w_2 = 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^{\alpha},$$

OWA operátory pre výber Ph.D. študentov

1. ak má záujemca>2 slabé výkony, potom jeho celkové hodnotenie<2
2. ak má záujemca max.2 slabé výkony, jeho celkové hodnotenie>2
3. ak má záujemca všetky okrem jedného výkonu výborné, jeho celkové hodnotenie by malo byť okolo 2.75
4. ak má záujemca 3 slabé výkony a jeden z nich je kritérium a_2, potom jeho celkové hodnotenie by nemalo byť nad 1.5

2. Výpočet celkového hodnotenia záujemcu všetkými odborníkmi

$$\text{agregácia}(b_1, \ldots, b_{11}), \quad \text{kde } b_i \in [1, 3], \quad i = 1, \ldots, 11$$

- záujemci budú hodnotený na základe ich najlepších 4 hodnotení $(b_1, \ldots, b_4)$
- ak sa aspoň 3 experti dohodnú, že záujemca je výborný, jeho celkové a finálne hodnotenie ny malo byť 2.75

OWA operátory pre výber Ph.D. študentov

1. ak je finálne skóre <2, záujemca je diskvalifikovaný
2. ak je medzi 2 a 2.5, môže dostať štipendium, podľa celkového počtu štipendií k dispozícií
3. ak je aspoň 2.5, záujemca dostane štipendium

OWA operátory pre výber Ph.D. študentov

Expert 1	3	3	3	2	2	1	2.239
Expert 2	3	3	3	2	2	2	2.435
Expert 3	3	2	2	2	2	1	1.920
Expert 4	3	3	3	3	2	2	2.615
Expert 5	3	3	2	2	2	1	2.071
Expert 6	3	3	3	2	2	1	2.239
Expert 7	3	3	2	2	2	1	2.071
Expert 8	3	3	2	2	1	1	1.882
Expert 9	3	2	2	2	2	1	1.920
Expert 10	3	3	2	2	1	1	1.882
Expert 11	2	2	2	2	1	1	?

Tabuľka 1: hodnotenia expertov pre 1 študenta