7. SADA / 8. pr.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f((x,y,z)^T) = (x-y+2z,\ 3x-2y+4z)^T$

JADRO: $\ker f = \{\bar{u} : f(\bar{u}) = \bar{0}\}$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 3x - 2y + 4z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$x - y + 2z = 0$

$y - 2z = 0$

$\Downarrow$

$z = t \Rightarrow y = 2t$

$x - 2t + 2t = 0 \Rightarrow x = 0$

$\ker f = \{(0,2t,t)^T ; t \in \mathbb{R}\} \to$ je to priamka

$\Downarrow$

$\dim \ker f = 1$

OBRAZ: $(a,b)^T$ – ľubovoľný obraz – zistíme, aké môže byť $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= a \\ 3x - 2y + 4z &= b \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 3 & -2 & 4 & b \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \end{array}\right)}$$

SÚSTAVA MÁ RIEŠENIE PRE ĽUBOVOĽNÉ $a, b \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

TO ZNAMENÁ, ŽE NECH JE $(a,b)^T$ ľubovoľný vektor, vieme nájsť jeho vzor $(x,y,z)^T$, teda $\mathrm{Im} f$ je celá rovina $V_2(\mathbb{R})$

$\Downarrow$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$, báza môže byť napr. $[(0,1)^T, (1,0)^T]$, ale aj napr.: $((1,13)^T, (0,7)^T)$, TEDA ĽUBOVOĽNÉ DVA NEZÁVISLÉ VEKTORY.

$(1,3)^T$ je obraz vektora $(1,0,0)^T$

$(-1,-2)^T$ je obraz vektora $(0,1,0)^T$

$(2,4)^T$ je obraz vektora $(0,0,1)^T$

$\to$ TOTO SÚ TEDA OBRAZY BÁZY $V_3(\mathbb{R})$

$\Downarrow$

TEDA NÁM GENERUJÚ CELÝ $\mathrm{Im} f$, čo ZNAMENÁ, ŽE KAŽDÝ VEKTOR z $\mathrm{Im} f$ vieme pomocou nich vyrobiť (vygenerovať).

TIETO VEKTORY SÚ ZÁVISLÉ ($(2,4)^T$ JE NÁSOBKOM VEKTORA $(-1,-2)^T$), TAKŽE AK VYHODÍME NAPR. VEKTOR $(2,4)^T$ DOSTANEME BÁZU $\mathrm{Im} f$.

TEDA AJ TU VIDÍME, ŽE $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

7. sada / 3. pr.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f((x,y)^T) = (x-2y,\ x+y,\ y)^T$

JADRO:

$\ker f = \{\bar{u} : f(\bar{u}) = \bar{0}\} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ KONTROLA $x = 0$ $\Rightarrow$ $\ker f = \{(0,0)^T\}$

$\Downarrow$

$\operatorname{Dim} \ker f = 0$

OBRAZ: $(a,b,c)^T$ – ľubovoľný obraz

$\begin{cases} x - 2y = a \\ x + y = b \\ y = c \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 3 & b-a \\ 0 & 1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 3 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & b-a-3c \end{array}\right)$

OBRAZ $(1,0)^T$ OBRAZ $(0,1)^T$

SÚSTAVA MÁ RIEŠENIE

$\Updownarrow$

$b - a - 3c = 0$

$\Updownarrow$

$c = \dfrac{b-a}{3}$

ČO TO ZNAMENÁ? c ZÁVISÍ OD a, b

$\Downarrow$

PARAMETRE BUDÚ LEN DVA, TRETIA SÚRADNICA JE PEVNE NIMI DANÁ.

$\Downarrow$

TO ZNAMENÁ, ŽE V Im f NEBUDÚ VŠETKY VEKTORY Z $V_3(\mathbb{R})$, LEN NIEKTORÉ.

KAŽDÝ VEKTOR V Im f vieme dostať ako lin. kombináciu vektorov $(1,1,0)^T, (-2,1,1)^T$. TIETO VEKTORY SÚ NEZÁVISLÉ, PRETO TVORIA BÁZU Im f, teda $\dim \operatorname{Im} f = 2$ a BÁZA JE $((1,1,0)^T, (-2,1,1)^T)$.

Z TEJTO SÚSTAVY VIDÍME, AKO SA DÁ VYJADRIŤ OBRAZ $(a,b,c)^T$ POMOCOU x, y

$(a,b,c)^T = (x-2y,\ x+y,\ y)^T$

$\Downarrow$

$\operatorname{Im} f = \{(t-2s,\ t+s,\ s)^T ;\ t, s \in \mathbb{R}\}$

7. sada / 14. pr.

$\bar{v}_1 = (1,1,1)^T$
$\bar{v}_2 = (1,1,0)^T$
$\bar{v}_3 = (1,0,0)^T$
} vektory bázy $V_3(\mathbb{R})$ - vždy si overte, že je to báza

$f(\bar{v}_1) = (2,-1,4)^T$
$f(\bar{v}_2) = (3,0,1)^T$
$f(\bar{v}_3) = (-1,5,1)^T$

VZOR   OBRAZ

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

TOTO VIEME ZO ZADANIA

AKO? POUŽIJEME GEM

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

TOTO MÁME ZISTIŤ

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

TÚTO MATICU TREBA TRANSPONOVAŤ !!!

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

EŠTE OBRAZ VEKTORA $(2,4,-1)^T$

$$f((2,4,-1)^T) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$