Deváté cvičení

1. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matic:
a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
Výsledky: a) $\lambda_1 = 3, \overline{v_1} = [1,2]^T, \lambda_2 = -1, \overline{v_2} = [0,1]^T$, b) $\lambda_1 = 2\sqrt{3}, \overline{v_1} = [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]^T, \lambda_2 = -2\sqrt{3}, \overline{v_2} = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]^T$, c) $\lambda = 0, \overline{v}$ je každý vektor z $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{0}$, d) $\lambda = 1, \overline{v}$ je každý vektor z $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{0}$, e) $\lambda = 1, \overline{v} = [0,1]^T$.

2. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
Výsledky: a) $\lambda_1 = 1, \overline{v_1} = [0,1,0]^T, \lambda_2 = 2, \overline{v_2} = [-1,2,2]^T, \lambda_3 = 3, \overline{v_3} = [-1,1,1]^T$, b) $\lambda_1 = 0, \overline{v_1} = [1,2,-4]^T, \lambda_2 = 2, \overline{v_2} = [-1,2,2]^T, \lambda_3 = 3, \overline{v_3} = [-1,1,1]^T$, c) $\lambda_1 = 1, \overline{v_1} = [0,-6,1]^T, \lambda_2 = 4, \overline{v_2} = [-9,6,-8]^T, \lambda_3 = 7, \overline{v_3} = [0,0,1]^T$,

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic a) A, b) $A+I$, c) A^2 a d) A^{-1}.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Výsledky: a) $\lambda_1 = 2, \overline{v_1} = [1,1]^T, \lambda_2 = -1, \overline{v_2} = [4,1]^T$, b) $\lambda_1 = 3, \overline{v_1} = [1,1]^T, \lambda_2 = 0, \overline{v_2} = [4,1]^T$, c) $\lambda_1 = 4, \overline{v_1} = [1,1]^T, \lambda_2 = 1, \overline{v_2} = [4,1]^T$, d) $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \overline{v_1} = [1,1]^T, \lambda_2 = -1, \overline{v_2} = [4,1]^T$,

4. Určete vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic, a to
   - úvahou, z geometrické podstaty (nebo alespoň o vlastních číslech udělejte nějaký závěr)
   - výpočtem

   a) A je matice souměrnosti podle osy x v $\mathbb{R}^2$
   b) A je matice rotace o úhel $90°$ v $\mathbb{R}^2$

Výsledky: a) $\lambda_1 = 1, \overline{v_1} = [1,0]^T, \lambda_2 = -1, \overline{v_2} = [0,1]^T$, b) vlastní číslo v $\mathbb{R}$ neexistuje. Výpočtem: $\lambda_1 = i, \overline{v_1} = [i,1]^T, \lambda_2 = -i, \overline{v_2} = [-i,1]^T$.

5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Výsledky: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \overline{v} = [2,1]^T$

6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Výsledky: $\lambda_1 = 2, \overline{v_1} = [1,1,0]^T; \lambda_2 = \lambda_3 = 3, \overline{v_2} = [1,2,0]^T, \overline{v_3} = [0,4,1]^T$.

7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A. Všimněte si, že se jedná o symetrickou matici. Zkontrolujte, že vlastní vektory mají tu vlastnost, kterou u symetrické matice musí mít.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Výsledky: $\lambda_1 = 1, \overline{v_1} = [-1,2,1]^T, \lambda_2 = 3, \overline{v_2} = [1,0,1]^T, \lambda_3 = -2, \overline{v_3} = [1,1,-1]^T$.

8. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A.
Výsledky: $\lambda_1 = 3, \overline{v_1} = [1,0,1]^T, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \overline{v_2} = [-1,0,1]^T, \overline{v_3} = [0,1,0]^T$,

9. Pro které hodnoty a, b je vektor $\overline{v}$ vlastním vektorem matice A a ke kterému vlastnímu číslu přísluší?
$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & b & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{v} = [1,1,2,0]^T$$
Výsledky: $a = 0, b = 2, \lambda = 4$.

10. U matice
$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$
známe tři vlastní čísla a to $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.
Výsledky: $\lambda_4 = 7$.

11. * Bez sestavení charakteristického polynomu najděte všechna vlastní čísla matice
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(Část vlastních čísel lze určit „od oka“, část se dopočítá. Pokud nějaké vlastní číslo uhodnete, zdůvodněte, jak jste na to přišli.)
Ještě otázka k zamyšlení: Kdyby vám někdo prozradil dvě vlastní čísla matice 4×4, byli byste vždycky schopni bez charakteristikého polynomu dopočítat zbylá dvě, nebo to někdy není možné?

12. Určete vlastní čísla matic A (viz jeden z předchozích příkladů), B, $A+B, AB$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & 5 \end{pmatrix},$$

a ověřte, že součet vlastních čísel matice $A+B$ je roven součtu všech vlastních čísel matic A, B a že součin vlastních čísel matice AB je roven součinu všech vlastních čísel matic A, B.
* Je to náhoda, nebo zákonitost pro jakékoli dvě matice stejných rozměrů? Zdůvodněte!

Výsledky: $A : \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$; $B : \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 5$; $A+B : \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -3$; $AB : \lambda_1 = -5, \lambda_2 = -10$