Osmé cvičení

1. Je dán trojúhelník ABC, kde $A = [3, -1], B = [3, 3], C = [1, 1]$.

   a) Najděte trojúhelník $A'B'C'$, který vznikne otočením tohoto trojúhelníka o $45°$ v kladném směru, střed otáčení je v počátku soustavy souřadnic.

   b) Vypočítejte délky stran AB, AC v původním trojúhelníku a $A'B', A'C'$ v otočeném trojúhelníku.

   c) Určete úhel u vrcholu A v původním trojúhelníku a úhel u vrcholu A' v otočeném trojúhelníku.

   d) Určete obsahy obou trojúhelníků.

   e) Vypočítejte determinant použité matice rotace. Jaká je souvislost s obsahy trojúhelníků?

Výsledky: a) $A' = [2\sqrt{2}, \sqrt{2}], B' = [0, 3\sqrt{2}], C' = [0, \sqrt{2}]$, b) $\|AB\| = \|A'B'\| = 4, \|AC\| = \|A'C'\| = 2\sqrt{2}$, c) $\alpha = \alpha' = 45°$, d) $S = S' = 4$, e) 1, obsah se nemění.

2. a) Sestavte matici stejnolehlosti se středem v počátku soustavy souřadnic a koeficientem $k = -3$.

   b) Najděte trojúhelník $A'B'C'$ jako obraz trojúhelníka ABC z předchozího příkladu v této stejnolehlosti. Načrtněte obrázek.

   c) Určete obsah a obvod trojúhelníka $A'B'C'$ a porovnejte s obsahem a obvodem původního trojúhelníka. Jak to souvisí s determinantem matice?

   d) Jaký koeficient stejnolehlosti je nutno vzít, aby se obsah trojúhelníka zdvojnásobil?

   e) Jaký koeficient vzít, aby se zdvojnásobil jeho obvod?

Výsledky: a) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, b) $A' = [-9, 3], B' = [-9, -9], C' = [-3, -3]$, c) $S' = 36, o' = 12(1 + \sqrt{2})$, obsah se zdevítinásobí, obvod se ztrojnásobí, d) $k = \pm\sqrt{2}$, e) $k = \pm 2$

3. a) Rozhodněte, jaké transformace v rovině zprostředkují matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) A co matice AB, BA, BC, CB, AA, BB?
   Pokuste je prozkoumat bez výpočtů, z geometrické podstaty. Pak můžete výsledek ověřit výpočtem. Proč platí $BC = CB$, ale nikoli $AB = BA$?

   c) Ověřte, že platí $C = ABA$, a podle geometrické podstaty vysvětlete, proč tomu tak je.

Výsledky: a) A: souměrnost podle osy x, B, C: souměrnost podle přímky $y = x$, resp. $y = -x$, b) AB: rotace o $90°$ (bod se překlopí podle přímky $y = x$ a následně podle osy x), BA: rotace o $-90°$ (překlopení nejprve podle osy x, pak podle $y = x$), BC, CB: souměrnost podle počátku (překlápíme podle navzájem kolmých přímek), AA, BB: identita (překlopí se tam a zpět)

4. a) Sestavte matici osové souměrnosti podle přímky $y = 3x$.
   Návod: Můžete využít toho, že se jedná o matici lineární transformace a že snadno určíme obrazy dvou vhodně vybraných lineárně nezávislých vektorů.

b) Najděte bod A', který je osově souměrný podle dané přímky s bodem $A = [4, 2]$. Nakreslete i obrázek.

c) Najděte matici inverzní k matici z části a) – zkuste výsledek uhodnout z geometrické podstaty a pak ověřte výpočtem.

Výsledky: a) $\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$, b) $A' = [-2, 4]$, c) Inverze je rovna původní matici.

5. a) Sestavte matici souměrnosti podle roviny generované vektory $\overline{a}_1 = [1, -1, 1]^T, \overline{a}_2 = [1, 0, 2]^T$ (rovina prochází počátkem soustavy souřadnic).

   Návod: Opět můžete využít toho, že se jedná o matici lineární transformace a že snadno určíme obrazy tří vhodně vybraných lineárně nezávislých vektorů.

   b) Najděte bod A', který je souměrný podle dané roviny s bodem $A = [-1, 0, 4]$.

   Výsledky: a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A' = [3, 2, 2]$.

6. * Dokažte, že všechny matice rotace v rovině o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ tvoří grupu vzhledem k násobení matic.

V následujících příkladech pracujte s homogenními souřadnicemi.

7. Sestavte matici posunutí o vektor $\overline{u} = [1, -2]^T$ a matici posunutí o vektor $\overline{v} = [2, 0]^T$. Komutují spolu tyto dvě matice? (Tj. záleží u nich na pořadí násobení?) Rozhodněte podle geometrické podstaty a pak ověřte výpočtem.

   Výsledky: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ano, komutují, na pořadí nezáleží.

8. Sestavte matici rotace o úhel 90°. Komutuje tato matice s maticí posunutí o vektor $\overline{v} = [2, 0]^T$ z předchozího příkladu? Rozhodněte podle geometrické podstaty a pak ověřte výpočtem.

   Výsledky: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, nekomutuje.

9. Sestavte matici středové souměrnosti se středem v bodě $S = [1, -2]$ (lze využít výsledek jednoho z předchozích příkladů). Najděte pak obraz bodu $A = [3, -1]$ v této souměrnosti.

   Výsledek: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = [-1, -3]$

10. Sestavte matici rotace o úhel 90° se středem otáčení v bodě $S = [1, -2]$ (lze využít výsledky předchozích příkladů). Najděte pak obraz bodu $A = [3, -1]$ v této souměrnosti.

    Výsledek: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = [0, 0]$

11. * Sestavte matici osové souměrnosti podle přímky $y = 3x + 1$.