Sedmé cvičení

1. Která z dvojic vektorů tvoří bázi $V_2(\mathbb{R})$?

   a) $A = \big([1,2]^T, [-3,2]^T\big)$; b) $A = \big([1,2]^T, [-2,-4]^T\big)$.

   Najděte vektor $\overline{u}$, který má v této bázi souřadnice $[\overline{u}]_A = [2,-1]^T$. Vektor také načrtněte spolu s bázovými vektory.

   Výsledky: a) A je báze, b) A není báze, $\overline{u} = [5,2]^T$.

2. Jsou dány dvě báze $V_2(\mathbb{R})$:

   $A = \big([1,0,1]^T, [1,1,0]^T, [0,0,1]^T\big)$, $B = \big([2,2,0]^T, [0,0,1]^T, [1,0,1]^T\big)$.

   Určete souřadnice vektoru $\overline{u} = [2,4,-1]^T$ v obou bázích: Nejprve v bázi A. Pak s A porovnejte bázi B a souřadnice $\overline{u}$ v B určete pokud možno bez velkých výpočtů.

   Výsledky: $[\overline{u}]_A = [-2,4,1]^T$, $[\overline{u}]_B = [2,1,-2]^T$.

3. Jsou dány tři báze $V_2(\mathbb{R})$: standardní, $A = \big([1,1]^T, [-1,1]^T\big)$, $B = \big([2,1/2]^T, [0,1]^T\big)$.

   Najděte obě matice přechodu mezi bázemi A a B.

   Dále k zadaným vektorům určete jejich souřadnice ve zbývajících dvou bázích:

   a) $[\overline{u}]_A = [1,2]^T, \overline{u} = ?, [\overline{u}]_B = ?$
   b) $[\overline{v}]_B = [3,0]^T, \overline{v} = ?, [\overline{v}]_A = ?$
   c) $\overline{w} = [0,1]^T, [\overline{w}]_A = ?, [\overline{w}]_B = ?$

   Výsledky: matice přechodu od A k B je $\begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$; v opačném směru je $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$.
   a) $\overline{u} = [-1,3]^T, [\overline{u}]_B = [-1/2, 13/4]^T$, b) $\overline{v} = [6,3/2]^T, [\overline{v}]_A = [15/4, -9/4]^T$, c) $[\overline{w}]_A = [1/2,1/2]^T, [\overline{w}]_B = [0,1]^T$.

4. Nechť $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ jsou vektory prostoru $V_3(\mathbb{R})$ a lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je určena následovně:

   $$f(\overline{v}_1) = [1,-1,2]^T, f(\overline{v}_2) = [0,3,2]^T, f(\overline{v}_3) = [-3,1,2]^T.$$

   Určete $f(2\overline{v}_1 - 3\overline{v}_2 + 4\overline{v}_3)$.

   Výsledky:$[-10,-7,6]^T$.

5. Transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dána následovně: $[x,y]^T \mapsto [x,y,x+y]^T$. Zjistěte jestli je f lineární transformace. Svoje tvrzení zdůvodněte.

   Výsledky: f je lineární transformace, v důkaze je nutné ověřit všechny vlastnosti z definice lineární transformace.

6. Nechť transformace $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jsou dány předpisy

   - $f_1\big([x,y]^T\big) = [-2y, 3x, x-2y]^T$,
   - $f_2\big([x,y,z]^T\big) = [y,z,x]^T$,
   - $f_3\big([x,y,z]^T\big) = [x+z, y-z]^T$.

   a) Dokažte, že transformace f_1, f_2, f_3 jsou lineární.

b) Sestavte matice těchto zobrazení (vzhledem ke standardní bázi).

c) Pro vektor $\overline{a} = [1,2]^T$ počítejte postupně tyto vektory: $\overline{b} = f_1(\overline{a}), \overline{c} = f_2(\overline{b}), \overline{d} = f_3(\overline{c})$.

d) Určete předpis pro transformaci $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ a vypočtěte $\overline{d}$ znovu pomocí něj.

e) Určete předpis pro transformaci $f_1 \circ f_2 \circ f_3$

Výsledky: a) v důkazech je nutné ověřit všechny vlastnosti z definice lineární transformace,

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\overline{b} = [-4,3,-3]^T, \overline{c} = [3,-3,-4]^T, \overline{d} = [-1,1]^T$,

d) $f_3 \circ f_2 \circ f_1([x,y]) = [3x - 2y, x]^T$, e) nelze.

7. Najděte jádro a obraz transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, která je dáno předpisem $f\big([x,y]^T\big) = [0,x,y]^T$. Ukažte, že f je lineární transformace.

   Výsledky: $\operatorname{Ker} f = \{[0,0]^T\}, \operatorname{Im} f = \{[0,t,s]^T; t,s \in \mathbb{R}\}$, v důkaze je nutné ověřit všechny vlastnosti z definice lineární transformace

8. Najděte bázi a dimenzi jádra a obrazu transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, která je dána předpisem $f\big([x,y,z]^T\big) = [x - y + 2z, 3x - 2y + 4z]^T$.

   Výsledky: $\operatorname{Ker} f = \{[0,2t,t]^T; t \in \mathbb{R}\}, \dim \operatorname{Ker} f = 1$, báze je např. $[0,2,1], \dim \operatorname{Im} f = 2$, báze je např. $([0,1],[1,0])$.

9. Najděte bázi a dimenzi jádra a obrazu transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, která je dána předpisem $f\big([x,y]^T\big) = [x - 2y, x + y, y]^T$.

   Dále určete, pro kterou hodnotu $a \in \mathbb{R}$ leží vektor $v = [1,a,1]^T$ v oboru hodnot (obrazu) transformace f, a najděte všechny vektory, které se na něj zobrazí.

   Výsledky: $\operatorname{Ker} f = \{[0,0]^T\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$, báze je např. $\big([-2,1,1]^T, [1,1,0]^T\big)$, $a = 4$, vzor je $[3,1]^T$.

10. Pro následující transformace najděte jejich jádro.

    *U každé transformace rozhodněte, jestli je injektivní a jestli je surjektivní.

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\big([x,y]^T\big) = [y,x]^T$,
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\big([x,y]^T\big) = [0, 2x + 3y]^T$,
    (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\big([x,y]^T\big) = [x + y, x - y]^T$,
    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; f\big([x,y]^T\big) = [x, y, x + y]^T$,
    (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; f\big([x,y]^T\big) = [x - 2y, -x + 2y, 2x - 4y]^T$,
    (f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; f\big([x,y,z]^T\big) = [x + y - z, x - y + 3z]^T$.

    Výsledky: a) $\{[0,0]^T\}$, b) $\{[-\frac{3}{2}t, t]^T; t \in \mathbb{R}\}$,c) $\{[0,0]^T\}$, d) $\{[0,0,0]^T\}$, e) $\{[2t,t]^T; t \in \mathbb{R}\}$, f) $\{[-t,2t,t]^T; t \in \mathbb{R}\}$.

11. Lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dána následovně:

    $$f\big([1,2,1]^T\big) = [1,2]^T, f\big([1,1,3]^T\big) = [0,3]^T, f\big([2,3,-1]^T\big) = [1,1]^T.$$

    Určete $f\big([2,4,2]^T\big), f\big([2,3,4]^T\big), f\big([4,6,3]^T\big), f\big([1,7,8]^T\big), f\big([3,5,11]^T\big), f\big([2,13,19]^T\big)$.

    Výsledky: $f([2,4,2]^T) = [2,4]^T, f([2,3,4]^T) = [1,5]^T, f([4,6,3]^T) = [2,6]^T, f([1,7,8]^T) = \left[6, \frac{53}{5}\right]^T, f([3,5,11]^T) = \left[2, \frac{59}{5}\right]^T, f([2,13,19]^T) = [11,23]^T$.

    Pozn. Matice zobrazení je $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$.

12. Lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dána následovně:

$$f\big([1,2,1]^T\big) = [1,2]^T, f\big([1,1,3]^T\big) = [0,3]^T, f\big([2,3,-1]^T\big) = [1,a]^T.$$

Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $f\big([0,0,1]^T\big) = [0,4]^T$.

Výsledky: $a = -15$.

13. Nechť $\overline{v}_1 = [1,1]^T, \overline{v}_2 = [1,0]^T$ jsou vektory báze prostoru $V_2(\mathbb{R})$ (ověřte). Transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dána obrazy $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ následovně:

$$f(\overline{v}_1) = [-1,2,0]^T, f(\overline{v}_2) = [0,-3,5]^T.$$

Najděte matici transformace f vzhledem k jednotkové bázi a následně určete $f\big([2,-3]^T\big)$.

Výsledky: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$, $f\big([2,-3]^T\big) = [3,-21,25]^T$.

14. Nechť $\overline{v}_1 = [1,1,1]^T, \overline{v}_2 = [1,1,0]^T, \overline{v}_3 = [1,0,0]^T$ jsou vektory báze prostoru $V_3(\mathbb{R})$ (ověřte). Transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána obrazy $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ následovně:

$$f(\overline{v}_1) = [2,-1,4]^T, f(\overline{v}_2) = [3,0,1]^T, f(\overline{v}_3) = [-1,5,1]^T.$$

Najděte matici transformace f vzhledem k jednotkové bázi a následně určete $f\big([2,4,-1]^T\big)$.

Výsledky: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f\big([2,4,-1]^T\big) = [15,-9,-1]^T$.