Šesté cvičení

1. Je dán vektor $[1, -3, 7]$, vypočítejte jeho normu pro obvyklý skalární součin.

   Výsledky: $\sqrt{59}$.

2. Určete úhel mezi vektory $\overline{u} = [1, 0, 1], \overline{v} = [0, 1, 1]$ vzhledem k obvyklému skalárnímu součinu.

   Výsledky:60°.

3. Určete odchylku přímek p, q, kde $p : x = 1 + t, y = 1 + t, z = 1; t \in \mathbb{R}$ a $q : x = 2s, y = 3 + 9s, z = -1 + 6s; s \in \mathbb{R}$.

   Výsledky: 45°.

4. Určete parametr $c \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $\overline{a} = [-2, 3, c], \overline{b} = [5, c, -8]$ byly na sebe kolmé.

   Výsledky: $c = -2$.

5. Najděte všechny vektory z $V_3(\mathbb{R})$, které jsou kolmé na vektor $\overline{u} = [2, 1, -3]$. Tvoří tyto vektory vektorový podprostor prostoru $V_3(\mathbb{R})$? Pokud ano, uveďte příklad báze tohoto prostoru.

   Výsledky: vektory: $\left\{\left[\frac{3t-s}{2}, s, t\right]; t \in \mathbb{R}\right\}$ tvoří rovinu, její báze je např. $\left(\left[\frac{3}{2}, 0, 1\right], \left[-\frac{1}{2}, 1, 0\right]\right)$.

6. V prostoru $W = \langle\{\overline{a}, \overline{b}\}\rangle, \overline{a} = [-1, 1, 1], \overline{b} = [1, 1, 1]$ najděte ortogonální průmět vektoru $\overline{v} = [1, 3, 2]$.

   Výsledky:$\left[1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

7. Na přímce $p : x = 5 + 2t, y = -4 - t, z = 3 + t, t \in \mathbb{R}$, najděte bod, který je nejblíže k bodu $B = [3, 1, 0]$.

   Výsledky:$[1, -2, 1]$.

8. Vzhledem k obvyklému skalárnímu součinu vypočítejte obsah rovnoběžníka, který je dán vektory $[2, 1], [1, 2]$.

   Výsledky: 3.

9. Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, kde $A = [1, -2, 0], B = [2, -1, 0], C = [2, 0, 2]$.

   Výsledky: $\frac{3}{2}$.

10. Vzhledem k obvyklému skalárnímu součinu vypočítejte objem rovnoběžnostěnu, který je dán vektory $[2, 1, 1], [1, 2, 1], [3, 2, 1]$.

    Výsledky:2.

11. Nechť $\overline{u} = [u_1, u_2], \overline{v} = [v_1, v_2]$. Zjistěte, jestli následující operace jsou skalárním součinem:

    (a) $\overline{u} \cdot \overline{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2$,

(b) $\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 4u_2v_2$,

(c) $\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 3u_2v_2$.

Výsledky: a) je sk. součin, b) je sk. součin, c) není sk. součin.

12. Najděte všechny vektory z $V_2(\mathbb{R})$, které jsou kolmé na vektor $[1, 2]$ **vzhledem ke skalárnímu součinu definovanému v předchozím příkladu, části (b).**

Výsledky: $\{t \cdot [7, 1]; t \in \mathbb{R}\}$.

13. Na prostoru $\mathbb{R}_3$ je dána operace f následovně: $f\big([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]\big) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Dokažte, že se jedná o skalární součin. Potom vypočítejte normy a odchylku vektorů $\overline{x} = [1, 2, 3]$, $\overline{y} = [1, 1, 0]$.

Výsledky: $\|\overline{x}\|_f = 5$, $\|\overline{y}\|_f = 2, 60^\circ$.

14. * Dokažte, že pro libovolné vektory z V_n platí:

$$\big|\|\overline{a}\| - \|\overline{b}\|\big| \leq \|\overline{a} - \overline{b}\|.$$

15. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $[2, -1, 0, 1], [-4, 3, 4, -1], [4, 0, -13, -2]$.

Výsledky: $\Big(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot [2, -1, 0, 1], \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot [0, 1, 4, 1], \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot [2, 4, -1, 0]\Big)$.

16. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $[1, 0, 1, 0], [2, -1, 0, 1], [0, 1, 2, -1]$.

    Jestliže výsledek vyšel nějak „divně“, čím je to způsobeno? Jaká je dimenze V? Kolik vektorů bude tvořit jeho bázi?

Výsledky: $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [1, 0, 1, 0], \frac{1}{2} \cdot [1, -1, -1, 1]\Big)$.

17. Jakýmkoli způsobem (nemusí to být Gram-Schmidtův ortogonalizační proces) najděte ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$, která obsahuje vektor $[1, 2, -1]$. Kolik takových bází existuje?

Výsledky: např.: $([1, 2, -1], [1, 0, 1], [-1, 1, 1])$ je to jedno z nekonečně mnoha řešení.