Třetí cvičení

1. Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Určete $|A|, |-A|$ a $|2A|$.

   Výsledky: $|A| = 11, |-A| = 11, |2A| = 44$.

2. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Určete $|A|$.

   Výsledky: $|A| = -9$.

3. Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$,

   $$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Určete: $|A|, |B|, |C|, |D|, |E|$.
   (b) Určete: $|AB|$.

   Výsledky: (a) $|A| = -9, |B| = -18, |C| = 0, |D| = -18, |E| = -9$, (b) 162.

4. Nechť $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Určete $|A^T A|$.

   Výsledky: 144.

5. Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby:

   $\begin{vmatrix} c & 2 & 1 \\ 2 & c & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

   Výsledky: $c \in \{1, 2\}$.

6. Nechť $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Určete všechna $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $|A| = -4$.

   Výsledky: $c \in \{2, 6\}$.

7. Vypočítejte determinant matice Y, víme-li, že $|X| = -1$, kde

   $$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 2b & a \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ a & a & b \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

   Výsledky: $|Y| = -\frac{1}{2}$.

8. * Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby:

   $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 2 & b & a \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$

9. Určete determinanty matic A a B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

Výsledky: vysl. $|A| = 5, |B| = -6$.

10. * Definujme J_n jako determinant n-tého řádu

$$J_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Najděte rekurentní vztah pro výpočet J_n pomocí determinantů nižších řádů a pomocí něj pak určete J_6.

11. Pomocí determinantu určete obsah rovnoběžníku $ABCD$, kde $A = [0, 2], B = [-1, 0], C = [2, 1]$.

Výsledky: $S = 5$.

12. Určete všechna $c \in \mathbb{R}$, pro která má soustava:

$$\begin{array}{ccccccc} cx & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & cy & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

(a) právě jedno řešení.
(b) alespoň jedno řešení.

Výsledky: (a) $c \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, (b) $c \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

13. Uveďte příklad hodnot $c, p, r, s \in \mathbb{R}$, pro které má soustava:

$$\begin{array}{ccccccc} cx & + & 2y & + & z & = & p \\ 2x & + & cy & + & z & = & r \\ x & + & 2y & + & z & = & s \end{array}$$

(a) právě dvě řešení.
(b) alespoň dvě řešení.

Výsledky: (a) nelze, (b) pro $c = 1$ jakékoli hodnoty, kde $p = s$; pro $c = 2$ jakékoli hodnoty, kde $p = r$.

14. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ρ_1, ρ_2, ρ_3 v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lccccccccc} \rho_1: & x & - & 2y & + & z & - & 3 & = & 0 \\ \rho_2: & 2x & & & - & 3z & + & 5 & = & 0 \\ \rho_3: & x & + & ay & + & 6z & - & b & = & 0 \end{array}$$

Výsledky: Pro $a \neq -6, b \in \mathbb{R}$ se protínají v jednom bodě; pro $a = -6, b = 14$ se protínají v přímce; pro $a = -6, b \neq 14$ soustava nemá řešení, protínají se po dvojicích v rovnoběžných přímkách.

15. Soustavy rovnic s parametrem c z druhé sady cvičení řešte pomocí Cramerova pravidla.