

ZVÄZY

1. Na množine $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ sú dané relácie $R_i : i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ nasledovne:

- (a) $R_1 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, f), (d, f), (e, f)\}$,
- (b) $R_2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, f), (c, f), (d, f), (e, f)\}$,
- (c) $R_3 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, e), (e, f), (d, f)\}$,
- (d) $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, e), (b, d), (e, f), (d, f)\}$,
- (e) $R_5 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), (d, e), (e, f)\}$,
- (f) $R_6 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (c, e), (b, d), (b, e), (d, f), (e, f)\}$,
- (g) $R_7 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e), (e, f)\}$.

Ku každej z nich napíšte najmenšiu (vzhľadom na inklúziu) reláciu R_i^* , pre ktorú platí:

- $R_i \subseteq R_i^*$,
- R_i^* je reflexívna a tranzitívna.

Pre každú reláciu R_i^* zistite, či (M, R_i^*) je zväz. V prípade kladnej odpovede zistite, či (M, R_i^*) je distributívny alebo komplementárny zväz.

2. Vypíšte všetky podzväzy zväzov z predchádzajúcej úlohy.
3. Nájdite všetky neizomorfné zväzy na n -prvkovej množine, pričom $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
4. Nájdite všetky neizomorfné distributívne zväzy na 5-prvkovej množine.
5. Nech $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ je množina usporiadaná reláciou $|$, ktorá je definovaná nasledovne

$$\forall m, n \in X : (m|n \iff \exists p \in X : n = p \cdot m).$$

Zistite, či sa jedná o zväz a v prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.

6. Na množine $M = \{a, b, c, 2, 4, 8\}$ je daná relácia $|$, ktorá je definovaná nasledovne

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : (m|n \iff \exists p \in \mathbb{N} : n = p \cdot m).$$

Určte $a, b, c \in \mathbb{N}$ tak, aby $(M, |)$ bol zväz. Nájdite aspoň dve rôzne riešenia.

7. Nech $M = \{a, b, c, d\}$. Nakreslite hasseovský diagram pre $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, zistite, či je to zväz. V prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.
8. Na množine $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ zostrojte zväz, ktorý
 - (a) bude komplementárny, ale nebude distributívny,
 - (b) bude distributívny a komplementárny zároveň.
 - (c) bude distributívny ale nebude komplementárny.
 - (d) nebude distributívny ani komplementárny.
9. V Booleovej algebre $(X, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ zjednodušte výrazy:
 - (a) $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$,
 - (b) $(x \vee y) \vee (z \vee x) \vee (y \vee z)$,

$$(c) (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \vee (\overline{x \wedge y}).$$

10. V Booleovej algebre $(X, \vee, \wedge, \overline{}, 0, 1)$ dokážte:

$$(a) x \vee 1 = 1,$$

$$(b) \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y},$$

$$(c) y \leq \overline{x} \iff x \wedge y = 0.$$