Operácie

1. Na množine $A = \{a, b, c\}$ definujte (tabuľkou) operáciu, ktorá je
   (a) komutatívna a asociatívna,
   (b) komutatívna, ale nie je asociatívna,
   (c) asociatívna, ale nie je komutatívna,
   (d) nie je ani komutatívna, ani asociatívna.

   Výsledky: Napr.:

a)

$\star$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

b)

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

c)

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

d)

$\star$	a	b	c
a	a	c	c
b	b	a	c
c	c	b	c

2. Na množine $\mathbb{Z}$ sú definované operácie
   (a) $a \circ b = a + b + 1$,
   (b) $a \star b = 2a + b$,
   (c) $a \Delta b = a^3 + b^3$.
   (d) $a * b = a + b - a \cdot b$.

   Určte ich vlastnosti.

   Výsledky: a)$\circ$ je komutatívna, asociatívna, má neutrálny prvok $e = -1$, ku každému prvku z $\mathbb{Z}$ existuje inverzný prvok $-2 - a$, b) $\star$ nie je komutatívna, nie je asociatívna, nemá neutrálny prvok, teda ani inverzné prvky, c) Δ je komutatívna, nie je asociatívna, nemá neutrálny prvok, teda ani inverzné prvky, d) $*$ je komutatívna, asociatívna, má neutrálny prvok $e = 0$, inverzný prvok existuje len pre tie $a \in \mathbb{Z}$, pre ktoré je zlomok $\frac{a}{a-1}$ celé číslo.

3. Nájdite asociatívne operácie na množine reálnych čísel $\star_1, \star_2, \star_3$ (rôzne!), tak, aby platilo:

$$a \star_3 b = \frac{a \star_1 b + a \star_2 b}{2}.$$

   Výsledky: napr.: $a \star_1 b = 6, a \star_2 b = 4 \Rightarrow a \star_3 b = 5$.

4. Na množine $A = \{a, b, c, d\}$ definujte operáciu $\star$ tak, aby grupoid $(A, \star)$ mal
   (a) práve jeden podgrupoid,
   (b) práve dva podgrupoidy,
   (c) práve tri podgrupoidy,
   (d) práve päť podgrupoidov.

   Výsledky: napr.:

a)

$\star$	a	b	c	d
a	b	c	c	d
b	b	c	c	d
c	c	b	d	d
d	d	d	d	a

b)

$\star$	a	b	c	d
a	a	c	c	d
b	d	a	c	d
c	a	b	b	d
d	a	b	c	c

c)

$\star$	a	b	c	d
a	a	c	c	d
b	b	b	d	b
c	c	a	b	b
d	d	b	b	c

d)

$\star$	a	b	c	d
a	a	c	c	b
b	b	b	d	a
c	d	d	c	a
d	d	a	b	d

   a) Podgrupoid je len $(A, \star)$, b) podgrupoidy sú $(A, \star), (\{a\}, \star)$, c) podgrupoidy sú $(A, \star), (\{a\}, \star), (\{b\}, \star)$, d) podgrupoidy sú $(A, \star), (\{a\}, \star), (\{b\}, \star), (\{c\}, \star), (\{d\}, \star)$.

5. Na množine $A = \{a, b, c, d\}$ definujte operáciu $\star$ tak, aby $(A, \star)$

   (a) bol grupoid, ale nie asociatívny grupoid,

   (b) bol asociatívny grupoid bez neutrálneho prvku,

   (c) bol asociatívny grupoid s neutrálnym prvkom,

   (d) bola grupa.

   Výsledky: napr.

a)

$\star$	a	b	c	d
a	a	c	c	d
b	b	a	c	d
c	c	b	c	d
d	d	d	d	d

b)

$\star$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

c)

$\star$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	b	b
d	d	b	b	b

d)

$\star$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

6. Na množine $M = \{a, b, c, d\}$ je daná operácia $\circ$ nasledovne:

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	c	c
b	a	b	c	d
c	c	c	b	b
d	c	d	b	b

   (a) Je $(M, \circ)$ pologrupa?

   (b) Vypíšte všetky dvojprvkové podgrupoidy $(M, \circ)$.

   Výsledky: a) Nejedná sa o pologrupu, je porušená asociativita, napr. $c \circ (c \circ d) \neq (c \circ c) \circ d$. Dvojprvkové podgrupoidy sú: $(\{b, c\}, \circ), (\{b, d\}, \circ)$.

7. Na množine $\mathbb{Z}$ sú definované operácie

   (a) $a \circ b = a + b - 1$,

   (b) $a \star b = a \cdot b$,

   (c) $a \Delta b = a \cdot b - 1$.

   Zistite, v ktorých prípadoch sa jedná o grupu.

   Výsledky: a) je grupa, b) nie je grupa, napr. 2 nemá inverzný prvok, c) nie je grupa, je porušená asociativita.

8. Nech $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Nájdite operáciu $\circ$ tak, aby $(A, \circ)$ bol neasociatívny grupoid s neutrálnym prvkom a každý jeho prvok mal práve jeden inverzný prvok.

   Výsledky: Inšpiráciu hľadajte v učebnom texte algebra.pdf.

9. Na množine $A = \{a, b, c, d\}$ nájdite nekomutatívnu grupu, ak sa to dá. Svoju odpoveď zdôvodnite.

   Výsledky: Taká grupa neexistuje. Dôkaz skúste urobiť sporom.

10. Na množine $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ nájdite nekomutatívnu grupu, ak sa to dá. Svoju odpoveď zdôvodnite.

    Výsledky: Taká grupa existuje, je izomorfná s grupou z príkladu **??**.

11. Na množine $M = \{0, a, b, c, d, 1\}$ je daná operácia $\circ$ nasledovne:

$\circ$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	d	1
a	0	0	0	a	d	1
b	0	0	0	b	d	1
c	0	a	b	c	d	1
d	d	d	d	d	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Je $(M, \circ)$ pologrupa? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Operácia je na M uzavretá, aj asociatívna, teda $(M, \circ)$ je pologrupa. Nezabudnite na zdôvodnenie asociativity.

12. Na množine $A = \{a, b, c, d\}$ je tabuľkou daná operácia $\circ$ a na množine $B = \{1, 2, 3, 4\}$ operácia $\star$. Zistite, či existuje izomorfizmus medzi grupoidmi $(A, \circ)$ a $(B, \star)$. V prípadě kladnej odpovede izomorfizmus nájdite, v opačnom prípade zdôvodnite jeho neexistenciu.

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	a	c
b	b	d	b	c
c	a	b	c	d
d	c	c	d	a

$\star$	1	2	3	4
1	3	1	4	1
2	1	2	4	2
3	4	4	2	3
4	1	2	3	4

Výsledky: Izomorfizmus existuje: $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 3$.

13. Na množine $A = \{a, b, c, d\}$ je tabuľkou daná operácia $\circ$ a na množine $B = \{1, 2, 3, 4\}$ operácia $\star$. Zistite, či existuje izomorfizmus medzi grupoidmi $(A, \circ)$ a $(B, \star)$. V prípadě kladnej odpovede izomorfizmus nájdite, v opačnom prípade zdôvodnite jeho neexistenciu.

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	b	c
c	c	b	c	d
d	d	c	d	a

$\star$	1	2	3	4
1	3	1	4	1
2	1	2	4	3
3	4	4	2	3
4	1	3	3	4

Výsledky: Izomorfizmus neexistuje, napr. grupoid $(A, \circ)$ má neutrálny prvok, ale grupoid $(B, \star)$ nemá neutrálny prvok.

14. Nájdite epimorfizmus algebier $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ na $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2)$, $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ na $(\mathbb{Z}_3, \oplus_3)$, $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ na $(\mathbb{Z}_5, \oplus_5)$.

Výsledky: Epimorfizmus $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ na $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2)$ je $f(0) = f(2) = f(4) = 0, f(1) = f(3) = f(5) = 1$, epimorfizmus $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ na $(\mathbb{Z}_3, \oplus_3)$ je $f(0) = f(3) = 0, f(1) = f(4) = 1, f(2) = f(4) = 2$, epimorfizmus $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ na $(\mathbb{Z}_5, \oplus_5)$ neexistuje. Pozor, nestačí epimorfizmy nájsť, treba ukázať, že to epimorfizmy sú.

15. Na množine $A = \{a, b, c, d\}$ je daná relácia R takto

$$R = \{[a, a], [a, b], [b, a], [b, b], [c, c], [c, d], [d, c], [d, d]\}.$$

Ďalej je na množine A tabuľkou daná operácia $\circ$ takto

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Dokážte, že relácia R je kongruencia na množine A vzhľadom na operáciu $\circ$.

16. Na množine $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ je daný rozklad $\mathcal{S}$ nasledovne:

$$\mathcal{S} = \{\{a, e\}, \{b, d\}, \{c\}, \{f\}\}.$$

- Určte reláciu ekvivalencie R, ktorá je daná rozkladom $\mathcal{S}$.
- Na množine A určte operáciu $\circ$ tak, aby R bola reláciou kongruencie na A vzhľadom k operácii $\circ$.

Výsledky: $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [e, e], [f, f], [a, e], [e, a], [b, d], [d, b]\}$, operácia môže byť napr. $\forall a, b \in A; a \circ b = a$.