VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Matematický seminář pro FIT

Vlasta Krupková
Michal Fusek

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2018
http://www.umat.feec.vutbr.cz

Obsah

Úvod

Tento učební text je určen pro volitelný předmět Matematický seminář, který je zařazený ve studijním programu na základě zkušeností s hlubokými neznalostmi ze středoškolské matematiky, které v poslední době pozorujeme, a které brání úspěšnému zvládnutí látky v povinných předmětech na FIT.

V semináři se budeme snažit zopakovat a prohloubit znalosti ze střední školy, které jsou potřebné pro další studium na FIT. Je volitelný, tedy záleží jen na vlastním zvážení každého studenta, zda si jej zapíše. V prvním týdnu výuky se v předmětu IDA bude psát vstupní písemka (na 5 bodů), jejíž výsledek by mohl v tomto rozhodování pomoci - při zisku méně než 3 bodů je navštěvování semináře nanejvýš vhodné.

Práce v semináři bude probíhat podle jednotlivých témat; příklady k řešení v každé hodině budou dopředu zveřejněny, což by mohlo usnadnit zisk bodů za aktivitu ve výuce. Matematiku jste na střední škole měli (obvykle) čtyři roky, probíralo se toho mnoho. My se budeme snažit vybrat kapitoly hlavně s ohledem na potřeby Matematické analýzy, povinného předmětu v letním semestru 1. ročníku.

V první části tohoto učebního textu (kapitola 1) je uveden přehled základních pojmů a vzorců, které je vhodné mít při počítání k dispozici – jsou zvlášť na webové stránce pod odkazem „Shrnutí“, můžete si je samostatně vytisknout. Ve druhé – hlavní části – jsou pak řešené, komentované příklady; komentáře se snaží zdůraznit, k čemu budou jednotlivé partie dále sloužit, a na co je dobré se zaměřit.
Hlavní myšlenka: **Nejdříve se zamysli, proč to děláš, zvol vhodný postup a potom až začni mechanicky počítat!**

MATEMATIKA pochází z řeckého slova MÁTHEMA, což znamená vědění a poznání. Matematika nejsou počty – ty jsou jen jedním z nástrojů, které navíc může za nás vykonat počítač. Je prostředkem k popisu a formalizaci jevů v okolním světě, umožňuje odhadnout důsledky těchto jevů a najít souvislosti mezi nimi.

Arthur Shopenhauer napsal: „Žádat, aby někdo všechno, co kdy četl, podržel v paměti, je jako žádat, aby v sobě nosil všechno, co kdy snědl. Žil z toho tělesně, z onoho duševně, a stal se tím, čím je. Tak jako tělo každého přijímá pouze to, co snáší, každý si zapamatuje jen to, co ho zajímá, co se hodí do jeho myšlenkové soustavy nebo k jeho účelům.“ Věříme, že něco z tohoto textu bude čtenáři k užitku. Snad přesto, že mnohé zapomene, zapamatuje si, kde to četl, aby se k textu případně později vrátil.
Uveďme ještě myšlenku Démokrita z Abdér: „Vzdělání má hořké kořeny, ale sladké ovoce.“

Přehled užitých symbolů

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle\| p, q \in \mathbb{Z} \right\}$	množina všech racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina všech kladných reálných čísel
$\mathbb{C} = \{x + i \cdot y \| x, y \in \mathbb{R}\}$	množina všech komplexních čísel
$\{\}, \emptyset$	prázdná množina
$x \in M$	x je prvek množiny M
$x \notin M$	x není prvek množiny M
$\{x \in M \| v(x)\}$	množina všech prvků z množiny M s vlastností $v(x)$
$p \wedge q$	konjunkce výroků p, q
$p \vee q$	disjunkce výroků p, q
$p \Rightarrow q$	p implikuje q
$p \Leftrightarrow q$	ekvivalence výroků p, q
$\forall$	obecný kvantifikátor (pro každý...)
$\exists$	existenční kvantifikátor (existuje...)
$M \subset N$	M je podmnožina N
$M = N \Leftrightarrow (M \subset N) \wedge (N \subset M)$	M se rovná N
$M \cup N = \{x \| \ x \in M \vee x \in N\}$	sjednocení množin M, N
$M \cap N = \{x \| \ x \in M \wedge x \in N\}$	průnik množin M, N
$M - N = \{x \| \ x \in M \wedge x \notin N\}$	rozdíl množin M, N
$A = [a_1, a_2]$ $(resp.\ A = [a_1, a_2, a_3])$	bod o souřadnicích a_1 ,a_2 (resp. a_1, a_2, a_3)
$u = (u_1, u_2)$ $(resp.\ u = (u_1, u_2, u_3))$	vektor o složkách u_1, u_2 (resp. u_1, u_2, u_3)
$\|a\|$, $\|z\|$	absolutní hodnota reálného (resp. komplexního) čísla

1 Základní pojmy - shrnutí

1.1 Úpravy algebraických výrazů

Mocniny a odmocniny

Pro každé reálné $r,\ s$ a každé $a > 0,\ b > 0$ (resp. pro každé celé $r,\ s$ a každé $a \neq 0,\ b \neq 0$) platí:

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1,\ a^1 = a & (a^r)^s = a^{rs} \\ a^{-r} = \frac{1}{a^r} & (ab)^r = a^r \cdot b^r \\ a^r \cdot a^s = a^{r+s} & \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \\ a^r : a^s = a^{r-s} & \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \end{array}$$

Dále platí

$$1^n = 1, \quad (-1)^{2n} = 1, \quad (-1)^{2n+1} = -1.$$

Je-li $n \in \mathbb{N},\ a \geq 0$, existuje právě jedno číslo $x \geq 0$ tak, že $x^n = a$. Toto číslo se nazývá ***n-tá odmocnina*** z čísla a a značí se $\sqrt[n]{a}$.
Je-li číslo $a < 0,\ n > 0$ liché, má rovnice $x^n = a$ právě jedno reálné řešení, totiž číslo $-\sqrt[n]{-a} < 0$. Místo $-\sqrt[n]{-a}$ píšeme $\sqrt[n]{a}$. Není-li n liché, symbol $\sqrt[n]{a}$ pro $a < 0$ nedefinujeme.

POZOR: ***Sudé odmocniny jsou definovány pouze pro nezáporná čísla, liché odmocniny jsou definovány pro všechna reálná čísla (tedy i pro záporná)!***

Platí

$$\begin{array}{ll} \sqrt[n]{0} = 0,\ \sqrt[n]{1} = 1, & \sqrt[2n+1]{-1} = -1, \\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \\ \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, & \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, & a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}. \end{array}$$

Pro $a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}$ definujeme $a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$. Potom platí:

$$a^{-\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{n}} = a^{\frac{r}{-n}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[n]{a^{-r}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^r}}.$$

Pro všechna $a > 0,\ b > 0$ a pro všechna $r \in \mathbb{Q},\ s \in \mathbb{Q}$ platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}, \quad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}.$$

POZOR! $(\sqrt{a})^2 = a$, ale $\sqrt{a^2} = |a|$!

Umocňování a rozklad dvojčlenů

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2,\\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,\\ (a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,\end{aligned}$$

obecně (***Newtonova binomická věta***)

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Čísla $\binom{n}{k}$ jsou tzv. ***binomické koeficienty*** (***kombinační čísla***) a platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Jejich hodnoty lze snadno najít pomocí ***Pascalova trojúhelníku***:

n – mocnitel dvojčlenu	binomické koeficienty
$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

Na začátku a konci každého řádku je jednička, další čísla jsou vždy součtem nejbližších dvou čísel o řádek výš.

Pro rozklad dvojčlenů platí:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b)\\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^4 - b^4 &= (a+b)(a-b)(a^2+b^2)\\
a^{2n} + b^{2n} &= \text{nelze rozložit}\\
a^{2n} - b^{2n} &= (a+b)\left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots + (-1)^{k-1}a^{2n-k}b^{k-1} + \cdots\right.\\
&\quad \left. + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right)\\
a^{2n+1} - b^{2n+1} &= (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots + (-1)^{k}a^{2n-k}b^{k} + \cdots\right.\\
&\quad \left. + ab^{2n-1} - b^{2n}\right)
\end{aligned}$$

Rozklad polynomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ na kořenové činitele:
Platí-li $P_n(x_0) = 0$, pak číslo x_0 se nazývá kořen polynomu $P_n(x)$, výraz $x - x_0$ kořenový činitel a platí

$$P_n(x) = (x - x_0)\, Q_{n-1}(x).$$

Polynom n-tého stupně má (v oboru komplexních čísel) právě n kořenů. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nutně různé) kořeny (reálné nebo komplexní) polynomu $P_n(x)$, platí

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)\,(x - x_2)\ \cdots\ (x - x_n) \qquad \text{(rozklad na kořenové činitele)}$$

a dále

$$a_0 = (-1)^n a_n\, x_1 x_2\ \cdots\ x_n.$$

Pro kořeny polynomu ***druhého stupně*** $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ platí známý vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Je-li koeficient b sudý, $b = 2k$, můžeme použít vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Zřejmě platí

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

tedy pro $a = 1$ je

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \ \Rightarrow\ \underline{b = -(x_1 + x_2)},\ \underline{c = x_1 x_2}.$$

Jinak platí

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2 \ \Rightarrow\ \underline{b = -a \cdot (x_1 + x_2)},\ \underline{c = a \cdot x_1 x_2}.$$

Obecně pro polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ platí

$$\underline{\underline{a_0 = (-1)^n \cdot a_n \cdot x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

1.2 Funkce

IDA:
Funkce (zobrazení) $f : A \to B,\ \ x \mapsto y$ je podmnožina kartézského součinu $A \times B$ (relace z A do B), pro kterou platí

$$\forall x \in A\ \ \exists!\, y \in B : \ \ (x, y) \in f.$$

Jsou-li množiny A, B konečné, můžeme příslušné množiny A, B, jejich kartézský součin $A \times B$ i funkci $f \subset A \times B$ zadat výčtem prvků. Jsou-li tyto množiny nekonečné, popíšeme příslušné přiřazení pomocí předpisu (výrokovou funkcí), např.

$$f = \left\{(x, y) \,\middle|\, y = x^2\right\}$$

Obvykle rozumíme funkcí právě tento přiřazovací předpis tak, jak se funkce definovala na střední škole.

Střední škola:
Funkce je předpis f, který přiřazuje každému prvku nějaké množiny (definičního oboru D_f) prvek jiné množiny (oboru hodnot H_f).

<u>Tímto způsobem budeme chápat pojem funkce v předmětu IMA i v tomto semináři.</u>

Funkcí (jedné proměnné) obvykle rozumíme takové zobrazení, kdy definiční obor i obor hodnot jsou číselné množiny. Budeme se věnovat převážně reálným funkcím jedné reálné proměnné, tedy zobrazením

$$f : D_f \to H_f,\ \ D_f \subseteq \mathbb{R},\ H_f \subseteq \mathbb{R}.$$

Je-li funkce f zadaná nějakým předpisem, přičemž není explicitně zadán její definiční obor, rozumíme jím množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má příslušný předpis smysl. Tuto množinu nazýváme ***přirozeným definičním oborem*** funkce f.

Graf funkce jedné proměnné je množina bodů v rovině daná vztahem

$$\Gamma = \{(x, y)\ \mid x \in D_f \wedge y = f(x)\},$$

tedy právě ta množina, pomocí níž se definuje funkce v předmětu IDA.

Rovnost funkcí
Přímo z definice pojmu funkce plyne, že platí $f = g$, jestliže $D_f = D_g$ a $\forall x : \ f(x) = g(x)$.

Zúžení funkce
Zúžení funkce f na množinu M (nebo též ***parciální funkce***) je funkce $f\,|_M$ s definičním oborem $D_f \cap M$ dané předpisem

$$f\,|_M : \quad f\,|_M\,(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f \cap M.$$

Některé typy funkcí

Funkce f je ***rostoucí***, resp. ***klesající*** na množině M, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \text{resp.} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

a ***neklesající***, resp. ***nerostoucí*** na množině M, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \text{resp.} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funkce f je ***prostá***, platí-li

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right).$$

Funkce f je ***sudá***, resp. ***lichá***, platí-li

$$f(-x) = f(x), \quad \text{resp.} \quad f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f.$$

Funkce f je ***periodická***, jestliže $\exists p \neq 0$ tak, že platí

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in D_f.$$

Funkce f je ***ohraničená*** (shora, resp. zdola), je-li její obor hodnot ohraničený (shora, resp. zdola), tedy platí-li

$$\exists\, k \in \mathbb{R}\ \forall y \in H_f : (y \leq k, \text{ resp. } k \leq y)\,.$$

Vytváření nových funkcí

Z daných funkcí $f,\ g,\ \varphi$ (vztahy platí pro všechna x z definičních oborů vzniklých funkcí) lze vytvářet funkce nové.

Složená funkce $f \circ \varphi$ (čti f po φ) je dána vztahem

$$\left(f \circ \varphi\right)(x) = f\left(\varphi(x)\right).$$

Inverzní funkce f^{-1} je funkce s definičním oborem rovným oboru hodnot funkce f a s vlastností

$$f^{-1}(x) = y \ \Leftrightarrow f(y) = x.$$

<u>Funkce f má inverzní funkci f^{-1}, právě když f je prostá.</u>

Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle přímky $y = x$ (osy 1. a 3. kvadrantu).
Součet, rozdíl, součin a ***podíl*** funkcí – funkce $f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$ s vlastnostmi

$$\begin{aligned} \left(f \pm g\right)(x) &= f(x) + g(x), \\ \left(f \cdot g\right)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

1.3 Elementární funkce

Polynomy

Polynomy jsou funkce zadané pomocí předpisu tvaru

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

přičemž n je ***stupeň*** polynomu, a_i, $i = 0, \ldots, n$, je ***koeficient*** u i-té mocniny a a_0 je ***absolutní člen***.
Číslo x_0, pro které platí $P_n(x_0) = 0$, je ***kořen*** polynomu. Je-li x_0 kořen polynomu $P_n(x_0)$, nazývá se výraz $x - x_0$ ***kořenový činitel***, přičemž platí

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x).$$

Vlastnosti polynomů

- Polynom n-tého stupně má v oboru komplexních čísel právě n kořenů.
- Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nutně různé) kořeny polynomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + + \cdots + a_1 x + a_0$ (reálné nebo komplexní), platí

  $$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad (\textbf{\textit{rozklad na kořenové činitele}}).$$

- Platí $a_0 = (-1)^n a_n \, x_1 x_2 \cdots x_n$.

Funkční hodnoty polynomu určujeme pomocí ***Hornerova schématu***.

Určení $P_n(\alpha)$ pro $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_1 x + a_0$:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_1	a_0
α	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = \alpha \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$	$\cdots$	$b_{i-1} = \alpha \cdot b_i + a_i$	$\cdots$	$b_0 = \alpha \cdot b_1 + a_1$	$P(\alpha) = \alpha \cdot b_0 + a_0$

Přitom platí

$$P_n(x) = (x - \alpha)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_i x^i + \cdots + b_1 x + b_0\right) + P(\alpha).$$

Je-li α kořen polynomu P_n, tedy platí $P_n(\alpha) = 0$, dostáváme v dolním řádku tabulky koeficienty polynomu, který vznikne po vytknutí kořenového činitele $x - \alpha$.

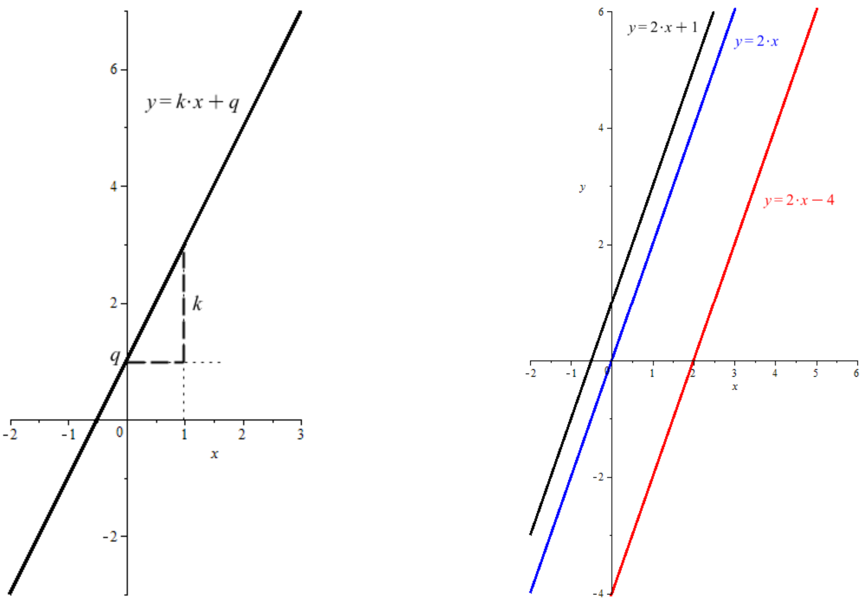
Speciální případy:

Lineární funkce je funkce tvaru $f(x) = kx + q$, $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$ (pro $k \neq 0$. Grafem je přímka (viz Obr. 1.1). Jelikož

$$f(0) = k \cdot 0 + q = q,$$

tak q značí úsek, který daná přímka vytíná na ose y. Dále

$$k = \frac{k}{1} = \operatorname{tg} \varphi$$



Obr. 1.1: Lineární funkce.

je směrnice dané přímky. Průsečík s osou x lze získat řešením rovnice $0 = k \cdot x + q$, tedy

$$x = -\frac{q}{k}.$$

Kvadratická funkce je funkce tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D_f = \mathbb{R}$, grafem je parabola (viz Obr. 1.2) a platí

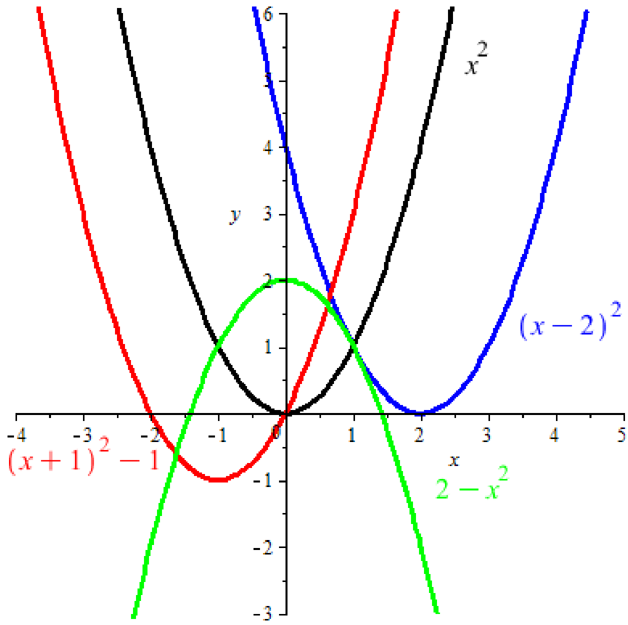
$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c \quad &\Leftrightarrow \quad y - c = a\left(x^2 - \frac{b}{a}x\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad y - \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 . \end{aligned}$$

Jestliže máme rovnici paraboly ve tvaru

$$y - B = k\,(x - A)^2\,,$$

pak má tato parabola vrchol $V = [A, B]$.

Je-li $k > 0$, je parabola „otevřená nahoru“, v intervalu $(-\infty, A)$ funkce klesá, v intervalu (A, ∞) roste.
Je-li $k < 0$, je parabola „otevřená dolů“, v intervalu $(-\infty, A)$ funkce roste, v intervalu (A, ∞) klesá.



Obr. 1.2: Kvadratická funkce:

- $y = x^2 \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x-0)^2$, vrchol $V = [0,0]$, $k = 1 > 0$, otevřená nahoru.
- $y = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x-2)^2$, vrchol $V = [2,0]$, $k = 1 > 0$, otevřená nahoru.
- $y = x^2 + 2x \Leftrightarrow y + 1 = 1 \cdot (x+1)^2$, vrchol $V = [-1,-1]$, $k = 1 > 0$, otevřená nahoru.
- $y = 2 - x^2 \Leftrightarrow y - 2 = -1 \cdot (x-0)^2$, vrchol $V = [0,2]$, $k = -1 < 0$, otevřená dolů.

Racionální lomené funkce

Racionální lomené funkce jsou funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kde $P_n(x)$, resp. $Q_m(x)$, jsou polynomy stupně n, resp. m.
Racionální funkce je ***ryze lomená*** pro $n < m$ a ***neryze lomená*** pro $n \geq m$.

Speciální případ:

Lineární lomená funkce je funkce tvaru

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

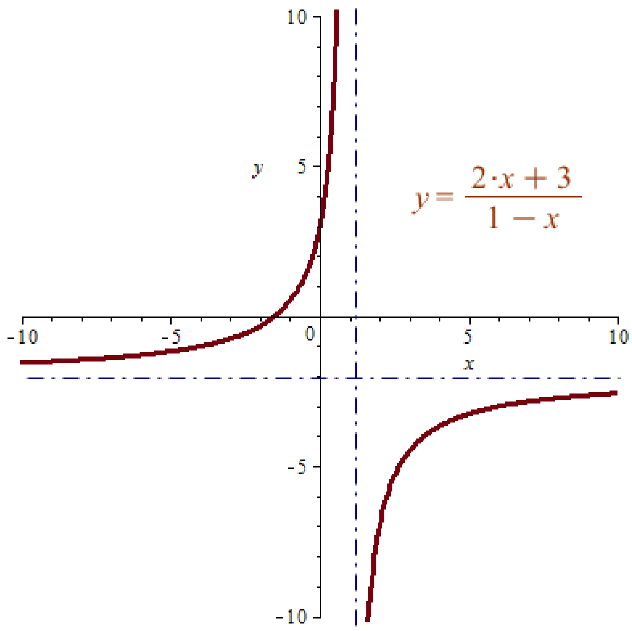
kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $x \neq -\frac{d}{c}$, $c \neq 0$, přičemž tuto funkci můžeme upravit na tvar

$$y - \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \left(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)}$$

neboli

$$y - B = k \cdot \frac{1}{x - A}.$$

Grafem je hyperbola s vrcholem $V = [A, B]$ a asymptotami $x = A$, $y = B$ (viz Obr. 1.3).



Obr. 1.3: Lineární lomená funkce.

Například pro

$$y = \frac{2x + 3}{1 - x} = \frac{2(x - 1) + 5}{-(x - 1)} = -2 - 5 \cdot \frac{1}{x - 1}$$

je grafem hyperbola $y + 2 = -5 \cdot \frac{1}{x-1}$, která má vrchol $V = [1, -2]$, asymptoty $x = 1$, $y = -2$, je rostoucí na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$ a prostá na celém definičním oboru.

Mocninné funkce

Mocninné funkce jsou funkce tvaru $f(x) = x^a$, kde $a \in \mathbb{R}$. Přitom mohou nastat tyto možnosti:

a) $a = 0$ (jedná se o konstantu).

b) a je přirozené číslo, $a \in \mathbb{N}$. Potom se jedná o speciální případ polynomu.

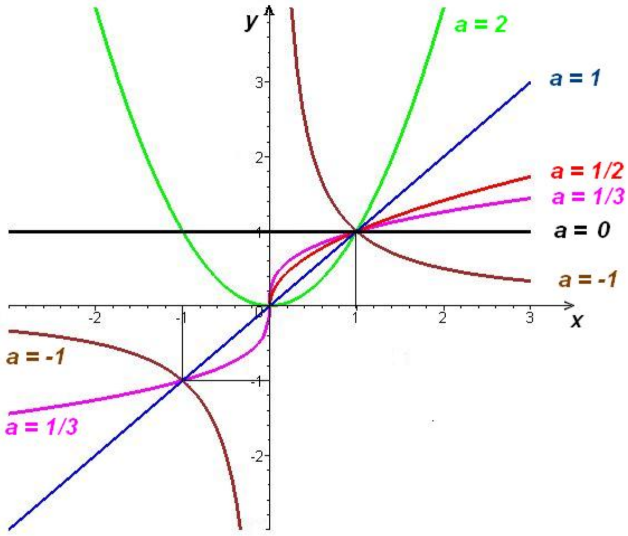
c) a je celé záporné číslo, $a = -r, r \in \mathbb{N}$. Potom $f(x) = x^{-r} = \frac{1}{x^r}$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

d) a je převrácená hodnota přirozeného čísla, $a = \frac{1}{n}$. Potom $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $D_f = \langle 0, \infty)$pro n sudé, $D_f = \mathbb{R}$ pro n liché.

e) a je racionální číslo, $a = \frac{p}{q}$. Potom $x^{\frac{p}{q}}$ je složená funkce, $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

f) a je iracionální číslo. Potom $D_f = \langle 0, \infty)$ pro $a > 0$ a $D_f = (0, \infty)$ pro $a < 0$.

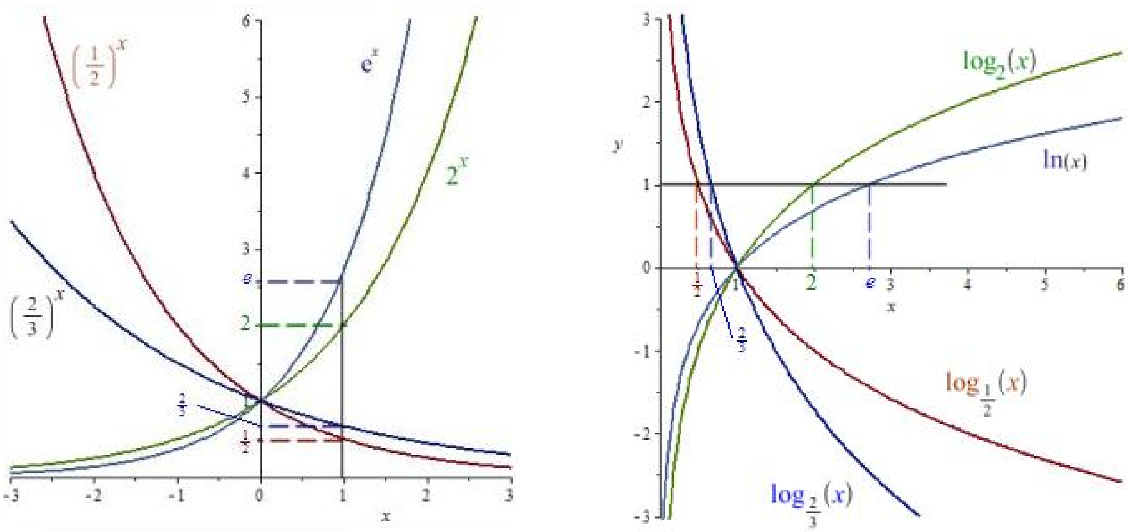
Grafy mocninných funkcí $f(x) = x^a$ jsou na Obr. 1.4.



Obr. 1.4: Mocninné funkce.

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce jsou funkce tvaru $f(x) = a^x$, kde $a > 0$, $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \infty)$. Funkce je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$. Pro $a = 1$ se jedná o konstantu $f(x) = 1$. Grafy všech exponenciálních funkcí procházejí bodem $[0, 1]$ (viz Obr. 1.5).



Obr. 1.5: Exponenciální (vlevo) a logaritmické (vpravo) funkce.

Logaritmické funkce

Logaritmické funkce při základu a, kde $0 < a < 1$ nebo $a > 1$, jsou funkce tvaru $f(x) = \log_a x$ a $D_f = (0, \infty)$. Jsou inverzní k funkcím $f(x) = a^x$, tedy platí

$$x = a^{\log_a x}$$

a $H_f = \mathbb{R}$. Jinak řečeno $\log_a x$ je číslo, na něž je třeba základ a umocnit, abychom dostali číslo x.
Logaritmická funkce při základu $e = 2,718281828\ldots$ se stručně nazývá logaritmická funkce (přirozený logaritmus) a značí se $\ln x := \log_e x$. Logaritmickou funkci při základu 10 (dekadický logaritmus) značíme $\log x := \log_{10} x$. Je-li $a > 0$, $b > 0$, přičemž $a \neq 1$, $b \neq 1$, platí

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

speciálně

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

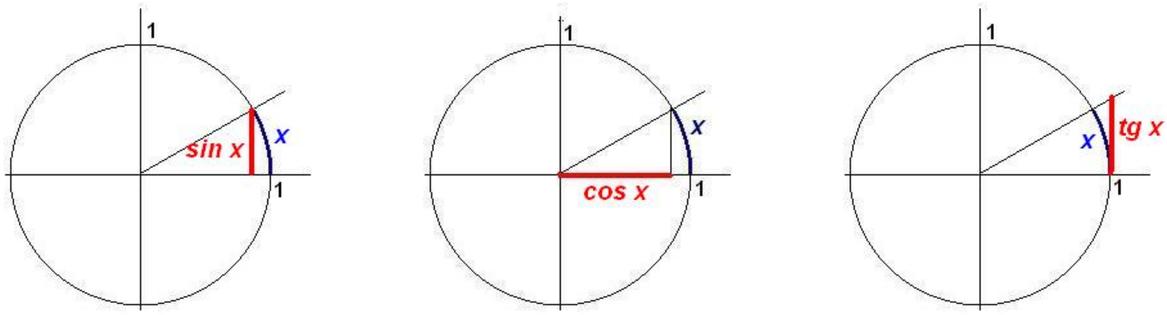
Všechny logaritmické funkce procházejí bodem $[1, 0]$ (viz Obr. 1.5).

Goniometrické funkce

Goniometrické funkce nebo také ***trigonometrické funkce*** reálného argumentu (úhlu v obloukové míře) jsou funkce

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \operatorname{cotg} x.$$

Lze je zavést pomocí jednotkové kružnice, viz Obr. 1.6.



Obr. 1.6: Zavedení goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice.

Je-li x délka oblouku na jednotkové kružnici mezi bodem $[1, 0]$ a průsečíkem této kružnice s polopřímkou, která vychází z počátku souřadnic, je $\sin x$ roven druhé souřadnici tohoto průsečíku a $\cos x$ jeho první souřadnici.
Zřejmě platí ***základní trigonometrická identita***

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{(z Pythagorovy věty)}.$$

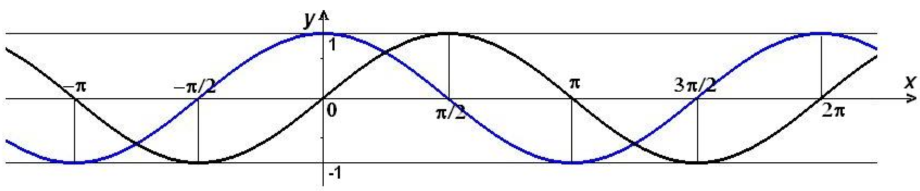
Dále definujeme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

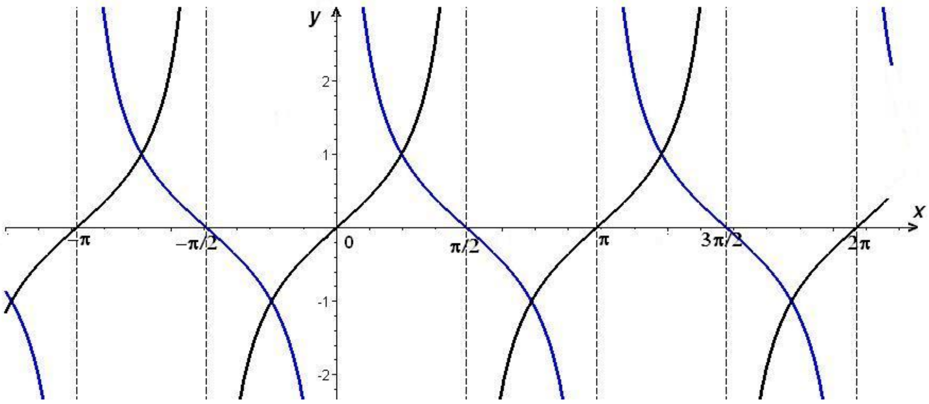
Definiční obory goniometrických funkcí jsou

$$\begin{aligned} D_{\sin x} &= D_{\cos x} = \mathbb{R}, \\ D_{\operatorname{tg} x} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ D_{\operatorname{cotg} x} &= \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ (viz Obr. 1.7) jsou periodické s periodou $p = 2\pi$, přičemž $\sin x$ je lichá a $\cos x$ je sudá. Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ (viz Obr. 1.8) jsou liché periodické funkce s periodou $p = \pi$.



Obr. 1.7: Funkce $\sin x$ (černá) a $\cos x$ (modrá).



Obr. 1.8: Funkce $\operatorname{tg} x$ (černá) a $\operatorname{cotg} x$ (modrá).

Hodnoty goniometrických funkcí pro některé argumenty:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin x$	0	1	0	-1	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos x$	1	0	-1	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\operatorname{tg} x$	0	není def.	0	není def.	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cotg} x$	není def.	0	není def.	0	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

Pro $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí následující užitečné vztahy:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x),\\
\cos x &= -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x),\\
\operatorname{tg} x &= -\operatorname{tg}(\pi - x),\\
\operatorname{cotg} x &= -\operatorname{cotg}(\pi - x).
\end{aligned}$$

Vyjádření goniometrické funkce daného argumentu pomocí jiné goniometrické funkce téhož argumentu:

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\pm \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\cot g^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\frac{\pm \operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+\cot g^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\pm \sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} x}$
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\pm \cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{cotg} x$

Následující identity pro goniometrické funkce platí vždy pro ty argumenty, pro které mají obě strany smysl.

Součtové vzorce:

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \operatorname{tg}(x \pm y) &= \tfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \operatorname{cotg}(x \pm y) &= \tfrac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}
\end{aligned}$$

Pro součin goniometrických funkcí platí:

$$\begin{aligned}
\sin x \,\sin y &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) & \sin x \,\cos y &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)\\
\cos x \,\cos y &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right) & \cos x \,\sin y &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(x+y) - \sin(x-y)\right)
\end{aligned}$$

Goniometrické funkce násobků argumentů:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x \cos x = \tfrac{2\operatorname{tg} x}{1+tg^2 x} & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \tfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\\
\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^2 x & \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x\\
\operatorname{tg} 2x &= \tfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \tfrac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x} & \operatorname{cotg} 2x &= \tfrac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x\right)
\end{aligned}$$

Goniometrické funkce polovičních argumentů:

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}\right)$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| = \left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$
$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)$$
$$\left|\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{\sin x}{1-\cos x}\right| = \left|\frac{1+\cos x}{\sin x}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Mocniny funkcí sinus a kosinus:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \sin^3 x = \tfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$
$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad \cos^3 x = \tfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

1.4 Analytická geometrie

Vektorem v rovině (resp. ***v prostoru***) rozumíme množinu všech rovnoběžných souhlasně orientovaných a stejně dlouhých úseček. Zvolíme-li jednu konkrétní z těchto úseček, např. $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, mluvíme o ***umístění*** vektoru do počátečního bodu A. Jestliže vektor umístíme do počátku souřadné soustavy $[0,0]$ (resp. $[0,0,0]$), potom souřadnice koncového bodu jsou ***souřadnice vektoru*** $\mathbf{u}$.
Je-li vektor umístěn v bodě A, $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ (resp. $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$), potom pro souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ platí

$$\mathbf{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \qquad (\text{resp. } \mathbf{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)).$$

Ze vztahu $\mathbf{u} = B - A$ plyne $B = A + \mathbf{u}$.

Operace s vektory

Mějme vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, resp. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Zavedeme několik operací s vektory.

Velikost vektoru: $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, resp. $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Opačný vektor: $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2)$, resp. $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$

k-násobek vektoru: $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2)$, resp. $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$, $k \in \mathbb{R}$
O vektorech $\mathbf{u}$ a $k\mathbf{u}$ říkáme, že jsou ***kolineární***.

Rovnost vektorů: $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow (u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2)$,
resp. $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow (u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3)$

Součet vektorů: $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, resp. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Rozdíl vektorů: $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$, resp. $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

Lineární kombinace vektorů: $k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} = (k_1u_1 + k_2v_1, k_1u_2 + k_2v_2)$,
resp. $k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v} = (k_1u_1 + k_2v_1, k_1u_2 + k_2v_2, k_1u_3 + k_2v_3)$,
$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Skalární součin vektorů: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \ (\in \mathbb{R})$,
resp. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \ (\in \mathbb{R})$,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\varphi$, kde $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

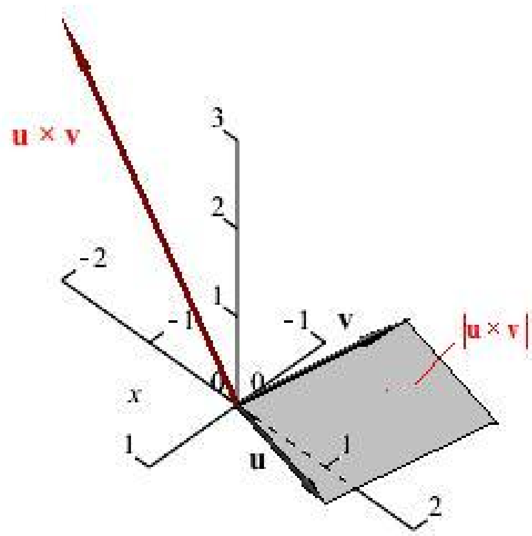
Vektorový součin vektorů (pouze v prostoru!):

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Výsledný vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý na rovinu, v níž leží vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a pro jeho velikost platí

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\varphi \quad \text{(plošný obsah kosodélníku tvořeného vektory } \mathbf{u}, \mathbf{v}\text{)},$$

přičemž trojice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tvoří pravotočivý systém (viz Obr. 1.9).



Obr. 1.9: Vektorový součin.

Přímka v rovině

Prochází-li přímka p body A, B, potom pro bod $X \in p$ je vektor $X - A$ kolineární s vektorem $B - A$, tedy pro některé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$X - A = t\,(B - A)\,,$$

neboli

$$X = A + t\,(B - A)\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

(***parametrická rovnice*** přímky p zadané dvěma body A, B)

Rozepsáním na složky dostaneme pro body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ rovnice

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1), \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2),\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Prochází-li přímka p bodem $A = [a_1, a_2]$ rovnoběžně s vektorem $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, který se nazývá ***směrový vektor*** přímky p, potom pro bod $X \in p$ je vektor $X - A$ kolineární s vektorem $\mathbf{s}$, tedy pro některé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$X - A = t \cdot \mathbf{s},$$

neboli

$$X = A + t \cdot \mathbf{s},\ t \in \mathbb{R}.$$

(***parametrická rovnice*** přímky p zadané bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{s}$)

Rozepsáním na složky dostaneme pro bod $A = [a_1, a_2]$ a směrový vektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ rovnice

$$\begin{aligned} x &= a_1 + ts_1, \\ y &= a_2 + ts_2,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky p je tvaru $ax + by + c = 0$ a odvodí se z parametrických rovnic eliminací parametru t. Tedy

$$\left.\begin{array}{l|l} x - a_1 = t\,s_1 & \cdot s_2 \\ y - a_2 = t\,s_2 & \cdot s_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} s_2\,(x - a_1) = t\,s_1 s_2 \\ s_1\,(y - a_2) = t\,s_1 s_2 \end{array}\right| \Rightarrow s_2\,(x - a_1) - s_1\,(y - a_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_2 x - s_1 y + s_1 a_2 - s_2 a_1 = 0 \Rightarrow \underline{a = s_2, b = -s_1}$$

a dále

$$(s_2, -s_1) \cdot (x - a_1, y - a_2) = 0 \Leftrightarrow \underline{(s_2, -s_1) \cdot (X - A) = 0}.$$

Tedy pro libovolný bod X na přímce $ax + by + c = 0$ je polohový vektor $X - A$ kolmý na vektor $\mathbf{n} = (s_2, -s_1) = (a, b)$.

Normálový vektor přímky o rovnici $ax + by + c = 0$ je vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ (a libovolný

jeho násobek).
Pro $b \neq 0$ můžeme obecnou rovnici přímky převést na ***směrnicový tvar***

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = kx + q \quad \text{(přímka je grafem lineární funkce (viz kapitola funkce)).}$$

Vzdálenost bodu $A = [x_0, y_0]$ ***od přímky*** $p: \; ax + by + c = 0$ je

$$d(p, A) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Odchylka přímek $p: \; a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $q: \; a_2x + b_2y + c_2 = 0$ je rovna úhlu jejich normálových vektorů, platí tedy

$$\cos\varphi = \frac{(a_1, b_1)}{|(a_1, b_1)|} \cdot \frac{(a_2, b_2)}{|(a_2, b_2)|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \; \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Přímka a rovina v prostoru

Analogickou úvahou, pomocí které jsme odvodili parametrickou rovnici přímky v rovině, provedeme odvození v prostoru.
Parametrické rovnice přímky p zadané dvěma body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ jsou tvaru

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1), \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2), \\ z &= a_3 + t(b_3 - a_3), \; t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

a zadané bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ jsou tvaru

$$\begin{aligned} x &= a_1 + ts_1, \\ y &= a_2 + ts_2, \\ z &= a_3 + ts_3, \; t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Přímku v prostoru lze zadat jako průsečnici dvou rovin.

Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje!

Jestliže z parametrických rovnic vyjádříme parametr t a vzniklé vztahy porovnáme, dostaneme tzv. ***kanonické rovnice přímky***

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}.$$

Třemi body A, B, C, které neleží v přímce, je zadaná rovina ρ, pro jejíž libovolný bod X je vektor $X - A$ některou lineární kombinací vektorů $B - A$ a $C - A$, platí tedy

$$X - A = t_1(B - A) + t_2(C - A), \; t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

neboli

$$X = A + t_1 (B - A) + t_2 (C - A).$$

(***parametrická rovnice*** roviny ρ zadané třemi body A, B, C)

Rozepsáním na složky dostaneme pro body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$ rovnice

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1), \\ y &= a_2 + t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2), \\ z &= a_3 + t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3), \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Prochází-li rovina ρ bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ rovnoběžně se dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, potom pro bod $X \in \rho$ je vektor $X - A$ některou lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, tedy pro některá $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$X - A = t_1 \cdot \mathbf{u} + t_2 \cdot \mathbf{v},$$

neboli

$$X = A + t_1 \cdot \mathbf{u} + t_2 \cdot \mathbf{v}.$$

(***parametrická rovnice*** roviny ρ zadané bodem A a vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$)

Rozepsáním na složky dostaneme pro bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ rovnice

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1, \\ y &= a_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2, \\ z &= a_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3, \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice roviny $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$ se odvodí z parametrických rovnic eliminací parametrů t_1, t_2. Tedy

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r|l} x - a_1 = t_1 u_1 + t_2 v_1 & \cdot v_2 \\ y - a_2 = t_1 u_2 + t_2 v_2 & \cdot v_1 \end{array}\right\} \Rightarrow v_2 (x - a_1) - v_1 (y - a_2) = t_1 (u_1 v_2 - u_2 v_1) \, (u_2 v_3 - u_3 v_2) \\ \\ \left.\begin{array}{r|l} y - a_2 = t_1 u_2 + t_2 v_2 & \cdot v_3 \\ z - a_3 = t_1 u_3 + t_2 v_3 & \cdot v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_3 (y - a_2) - v_2 (z - a_3) = t_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) \, (u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x - a_1)(u_3 v_2 - u_2 v_3) + (y - a_2)(u_1 v_3 - u_3 v_1) + (z - a_3)(u_2 v_1 - u_1 v_2) = 0.$$

Platí tedy

$$(a, b, c) = k (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_2 v_1 - u_1 v_2) = k (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Tento vektor je kolmý na směrové vektory roviny ρ, tedy pro ***normálový vektor*** roviny ρ platí $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

Vzdálenost bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ ***od roviny*** $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$ je

$$d(\rho, A) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Kuželosečky

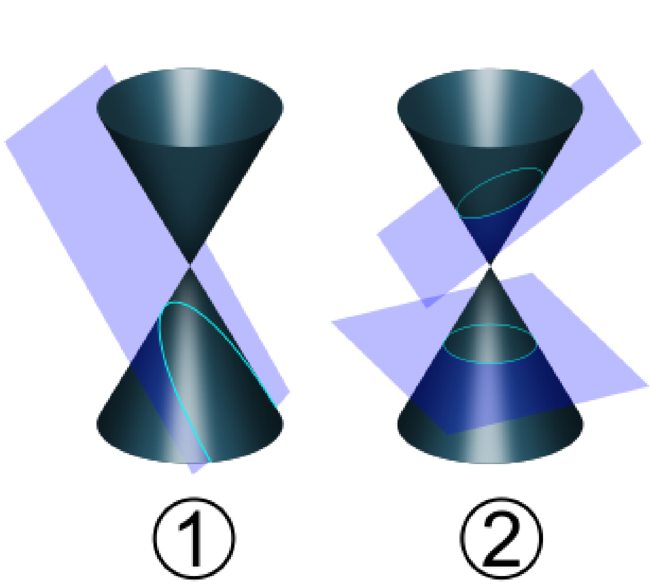
Kuželosečky jsou rovinné křivky, které dostaly společný název proto, že vzniknou jako řez kužele rovinou – podle toho, jaký má tato rovina sklon vzhledem k ose, resp. povrchové přímce kuželu, dostaneme (viz Obr. 1.10)

a) parabolu – rovina je rovnoběžná s povrchovou přímkou (která prochází vrcholem kuželu),

b) elipsu – rovina svírá s osou kuželu úhel $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

c) kružnici – rovina je kolmá na osu kuželu $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$,

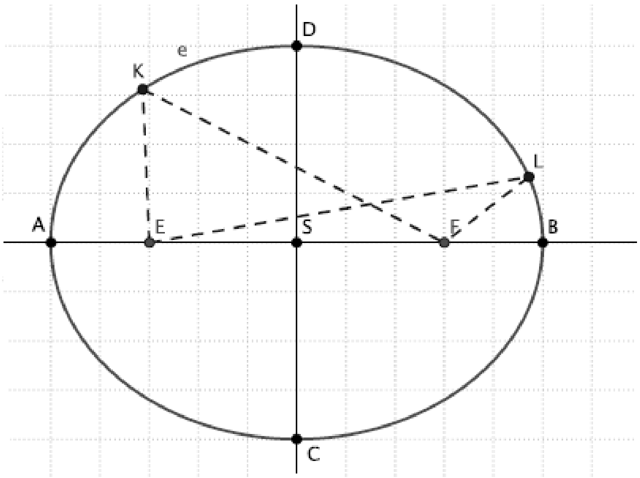
d) hyperbolu – rovina je rovnoběžná s osou kuželu $(\varphi = 0)$.



Obr. 1.10: Řez kužele rovinou (zdroj: Wikipedia). Parabola (č. 1), kružnice a elipsa (č. 2), hyperbola (č. 3).

Elipsa

Elipsa (viz Obr. 1.11) je křivka, jejíž každý bod má od daných dvou bodů v rovině stejný součet vzdáleností. Elipsa má dvě ohniska, označme je E a F. Elipsa obsahuje dva ***hlavní vrcholy*** A, B a dva ***vedlejší vrcholy*** C, D. ***Střed*** elipsy, na obrázku vrchol S, leží ve středu úsečky EF, tedy mezi ohnisky. Přímka, která prochází hlavními vrcholy (a také ohnisky), se nazývá ***hlavní osa*** elipsy, přímka která prochází vedlejšími vrcholy, se nazývá ***vedlejší osa*** elipsy. Úsečka, která spojuje libovolný hlavní vrchol a střed elipsy, se nazývá ***hlavní poloosa***. Na obrázku se jedná o úsečky AS a BS. Úsečka, která spojuje libovolný



Obr. 1.11: Elipsa.

vedlejší vrchol a střed elipsy, se nazývá ***vedlejší poloosa***. Na obrázku se jedná o úsečky CS a DS.
Rovnice elipsy se středem v počátku souřadnic a osami v souřadných osách má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Je-li střed elipsy v bodě $S = [m, n]$ a osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami, má rovnice tvar

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

V případě $a = b = r$ dostáváme ***kružnici*** s rovnicí

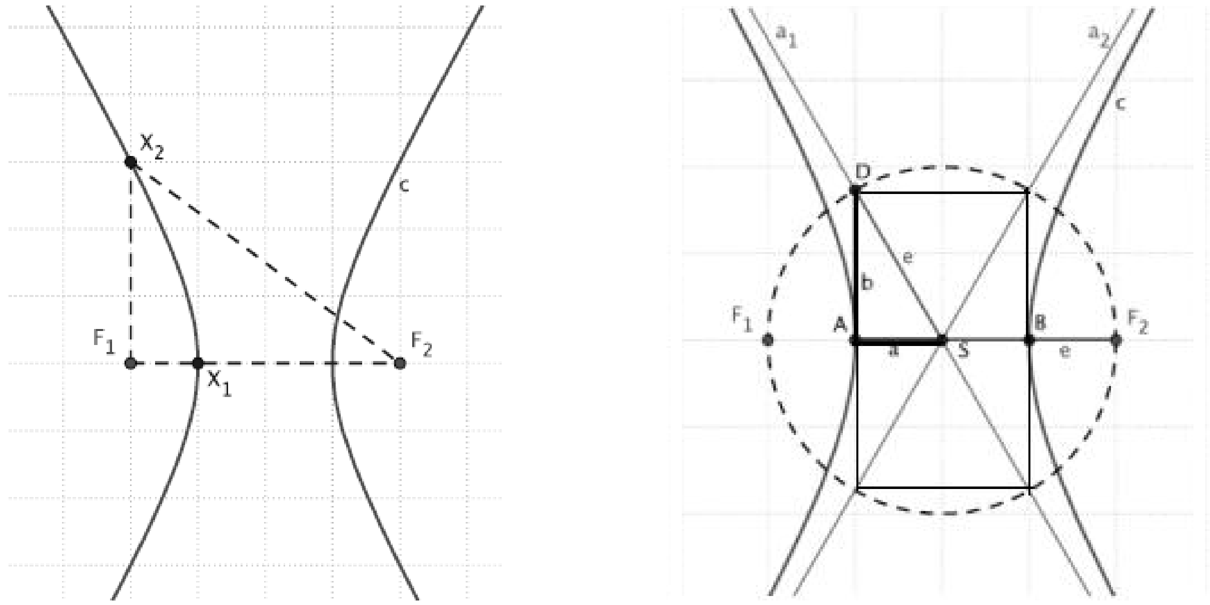
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{resp.} \quad (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Hyperbola

Hyperbola (viz Obr. 1.12) je kuželosečka, pro jejíž každý bod platí, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou pevně daných bodů je vždy stejná. Bodům F_1 a F_2 se říká ***ohniska***. Bod S se nazývá ***střed*** hyperboly a nachází se ve středu úsečky F_1F_2. Přímka F_1F_2 se nazývá ***hlavní osa*** hyperboly. Kolmice k této ose v bodě S se nazývá ***vedlejší osa*** hyperboly. Průsečíky hyperboly s hlavní osou se nazývají ***vrcholy*** hyperboly, na obrázku vpravo to jsou body A a B. Úsečky AS a BS se nazývají ***hlavní poloosy*** hyperboly. Jejich délku značíme a. Délku ***vedlejší poloosy*** hyperboly značíme b. Vzdálenost ohniska od středu se nazývá ***excentricita***, značíme ji e. Platí vztah $e = \sqrt{a^2 + b^2}$. Přímky a_1, a_2 procházející středem hyperboly (prodloužené úhlopříčky obdélníku vytvořeného pomocí poloos, viz Obr. 1.12) jsou ***asymptoty*** hyperboly.

Rovnice hyperboly se středem v počátku souřadnic a hlavní osou v ose o_x, resp. v ose o_y, má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{resp.} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



Obr. 1.12: Hyperbola.

Je-li střed hyperboly v bodě $S = [m, n]$ a hlavní osa je rovnoběžná s osou o_x, resp. s osou o_y, má rovnice tvar

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \text{resp.} \quad \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1.$$

Parabola

Parabola (viz Obr. 1.13) je křivka, která má od dané přímky a od daného bodu, který na té přímce neleží, konstantní vzdálenost. Bod F se nazývá ***ohnisko*** paraboly. Přímka d se nazývá ***řídící přímka*** paraboly. Přímka FD se nazývá ***osa*** paraboly, je kolmá k řídící přímce a prochází ohniskem. Bod V se nazývá vrchol paraboly a nachází se ve středu úsečky FD. Délku úsečky FD nazýváme ***parametrem*** paraboly. Jedná se o vzdálenost ohniska od řídící přímky.

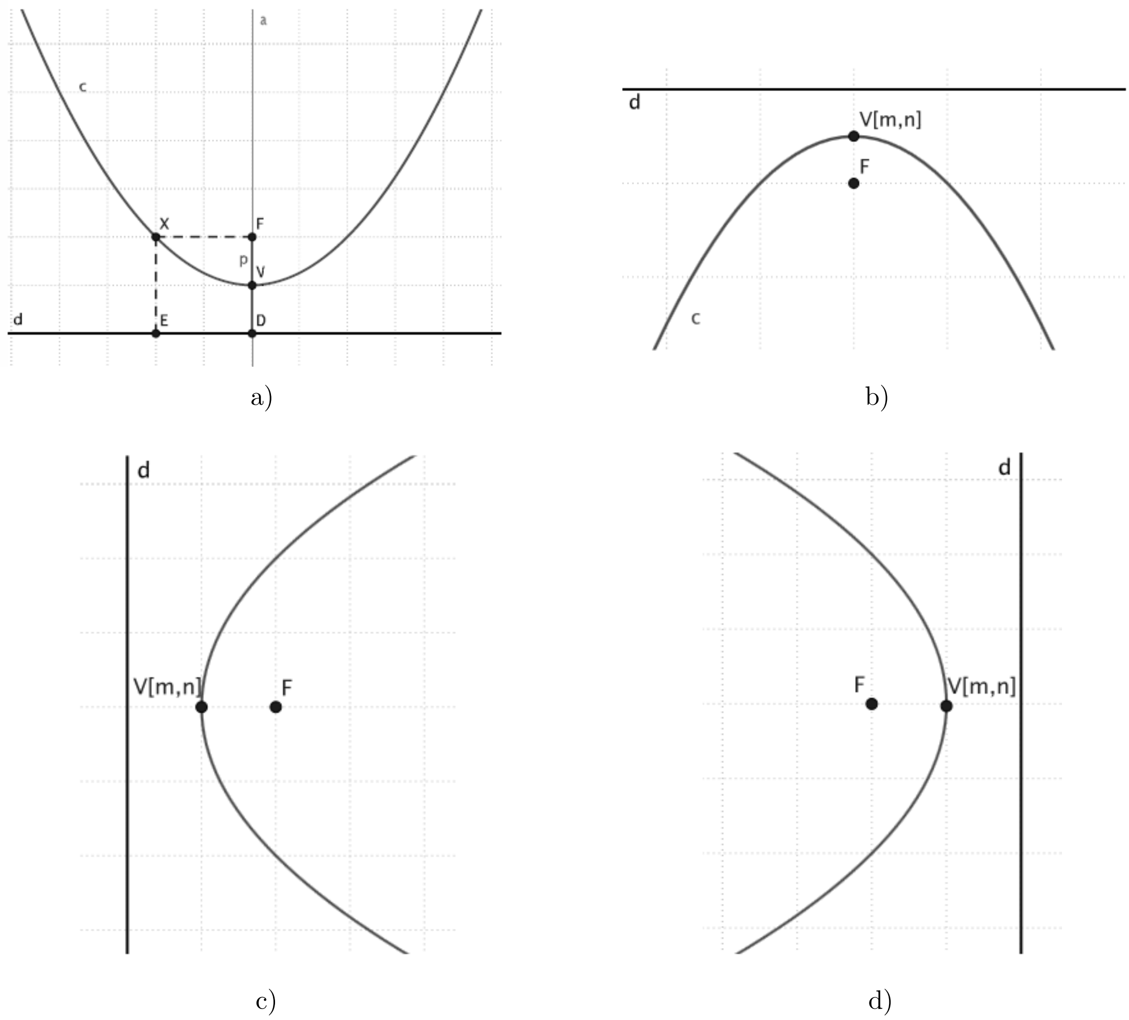
Rovnice paraboly

U paraboly rozlišujeme celkem čtyři různé případy, jak je orientována osa paraboly, tj. jestli je osa svislá (rovnoběžná s osou o_y), nebo jestli je osa vodorovná (rovnoběžná s osou o_x). Dále pak rozlišujeme případ, kdy je parabola otevřená nahoru nebo dolů a nalevo nebo napravo. Nechť má parabola vrchol $V = [m, n]$.

1) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_y, je otevřená nahoru a má rovnici

$$(x-m)^2 = 2p\,(y-n) \quad \Leftrightarrow \quad y-n = \frac{1}{2p}\,(x-n)^2\,.$$

Ohnisko má souřadnice $F = \left[m, n + \frac{p}{2}\right]$ (viz Obr. 1.13a).



Obr. 1.13: Parabola (zdroj: www.matematika.cz).

2) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_y, je otevřená dolů a má rovnici

$$(x-m)^2 = -2p\,(y-n) \quad \Leftrightarrow \quad y-n = -\frac{1}{2p}\,(x-n)^2 \,.$$

Ohnisko má souřadnice $F = \left[m, n+\frac{p}{2}\right]$ (viz Obr. 1.13b).

3) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_x, je otevřená doprava a má rovnici

$$(y-n)^2 = 2p\,(x-m)\,.$$

Ohnisko má souřadnice $F = \left[m+\frac{p}{2}, n\right]$ (viz Obr. 1.13c).

4) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_x, je otevřená doleva a má rovnici

$$(y-n)^2 = -2p\,(x-m)\,.$$

Ohnisko má souřadnice $F = \left[m-\frac{p}{2}, n\right]$ (viz Obr. 1.13d).

V případech 1) a 2) je parabola grafem kvadratické funkce, v případech 3) a 4) se ***nejedná o grafy funkcí***.

1.5 Komplexní čísla

Definujme ***imaginární jednotku*** i jako číslo, jehož druhou mocninou je -1, tedy

$$i^2 = -1.$$

Komplexním číslem se nazývá výraz

$$z = x + y \cdot i,$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$. Přitom x se nazývá reálná složka a y imaginární složka čísla z, což zapisujeme

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Komplexní čísla, jejichž imaginární složka je nulová, ztotožníme s reálnými čísly. Komplexní čísla, jejichž reálná složka je nulová, se nazývají ***ryze imaginární***. Zavedeme několik pravidel pro počítání s komplexními čísly.

Rovnost komplexních čísel je definována jako

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Sčítání (odčítání) komplexních čísel je definována jako

$$(x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)\, i.$$

Násobení komplexních čísel je definována jako

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (y_1 x_2 + x_1 y_2)\, i.$$

Dělení komplexních čísel je definována jako

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Absolutní hodnotu komplexního čísla definujeme předpisem

$$|z| = |x + y\, i| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Komplexně sdruženým číslem k číslu z je číslo

$$\overline{z} = x - yi.$$

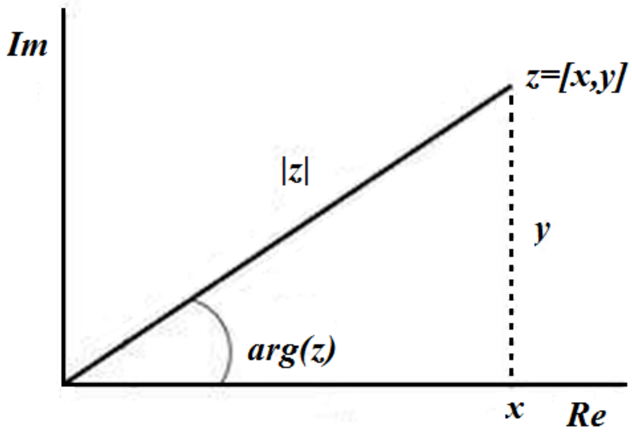
Platí

$$\begin{aligned}
z + \overline{z} &= (x + yi) + (x - yi) = 2x, & z \cdot \overline{z} &= (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2, \\
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z}_1 + \overline{z}_2, & \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, & |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, & \left|\tfrac{z_1}{z_2}\right| &= \tfrac{|z_1|}{|z_2|}.
\end{aligned}$$

Znázornění komplexních čísel

Komplexní čísla znázorňujeme jako body v rovině, které říkáme ***Gaussova rovina*** nebo ***rovina komplexních čísel***. Vodorovná osa souřadnic se nazývá ***reálná osa***, svislá pak ***imaginární osa***.

Komplexní číslo $z = x + yi$ znázorňujeme jako bod $[x, y]$. Přitom zřejmě (podle Pythagorovy věty) je $|z|$ rovna vzdálenosti bodu $[x, y]$ od počátku souřadnic (viz Obr. 1.14).



Obr. 1.14: Komplexní číslo v Gaussově rovině.

Úhel φ (v obloukové míře), který svírá průvodič obrazu čísla z s kladným směrem reálné osy, se nazývá ***argument*** komplexního čísla z a značí se $\arg(z)$, přičemž

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} & x = 0, \quad \begin{matrix} y > 0 \\ y < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

Nechť $z = x + yi$, $\varphi = \arg(z)$. Výraz

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

se nazývá ***goniometrický tvar*** komplexního čísla z. Je vhodný pro násobení a umocňování komplexních čísel, tedy

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(|z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\right)\left(|z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\right) \\ &= |z_1|\,|z_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right), \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{|z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right),$$

$$z^n = (|z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,,$$

kde $n \in \mathbb{Z}$. Předchozí vztah se nazývá ***Moivreova věta***.

Řešení rovnice $a^n = z$, kde z je komplexní číslo a n je celé číslo, je dáno právě všemi čísly

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Souhrn těchto n čísel nazýváme ***n-tou odmocninou*** z čísla z. Jestliže položíme

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{(Eulerův vzorec)},$$

dostaneme exponenciální tvar komplexního čísla

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Vztahy pro násobení a umocňování komplexních čísel v exponenciálním tvaru vyplývají z vlastností exponenciální funkce.

2 Řešené příklady a cvičení

2.1 Úprava algebraických výrazů

Úprava algebraických výrazů je základní nezbytná dovednost pro všechny partie matematiky, hlavně pro matematickou analýzu. Úpravu ale nesmíme provádět mechanicky podle toho, co nás nejdřív napadne – vždy je třeba myslet na to, **proč** úpravu provádíme, tedy nač upravovaný výraz potřebujeme – co s ním dále budeme dělat. **Úprava není cíl, ale prostředek**.

2.1.1 Odmocnina ve jmenovateli – usměrnění zlomků

Dělení zaokrouhleným číslem zatěžuje výsledek chybou, proto je přesnější co nejdéle počítat s odmocninami a zaokrouhlit až výsledek.

Příklad 2.1. Spočtěte

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Řešení.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{6}}} \left(= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(4 - 3\sqrt{2}\right) \right)$$

Vypočítáme předchozí výraz tak, že odmocniny zaokrouhlíme na 5 desetinných míst a výsledek také. Potom vypočítáme s přesností na 5 desetinných míst upravený výraz:

$$\sqrt{3} \doteq 1.73205, \quad \sqrt{6} \doteq 2.44949$$

$$\tfrac{2}{1.73205} = 1.154701077 \doteq 1.15470, \quad \tfrac{3}{2.44949} = 1,224744743 \doteq 1.22474$$

$$\tfrac{2}{1,73205} - \tfrac{3}{2,44949} \doteq 1.15470 - 1.22474 = -0.06904$$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6} = -0.070044333 \doteq -0.07004$$

Výsledky se liší již na druhém desetinném místě!

□

Cvičení

Upravte následující výrazy – odstraňte odmocniny ze jmenovatele:

1) $\left(\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{40}}\right)^2$ $\left[\frac{49}{40}\right]$

2) $\left(\frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}\right)^2$ $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^4\right]$

3) $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^{-1}$ $\left[\sqrt{7+5\sqrt{2}}+2+\sqrt{2}\right]$

4) $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2$ $\left[\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right]$

5) Ověřte, že platí $\sqrt{20}=\sqrt{15+10\sqrt{2}}-\sqrt{15-10\sqrt{2}}$.

2.1.2 Výrazy s racionálními exponenty

Máme zjednodušit následující výrazy. Takto formulované zadání není jednoznačné – co myslíme jednodušším, resp. nejjednodušším, tvarem? Výsledek určitě nebude vždy jen jediný. Našim cílem bude, aby ve výsledku bylo co nejméně odmocnin, resp. racionálních exponentů.

Příklad 2.2. Zjednodušte výraz

$$\sqrt[6]{\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}}:\sqrt[3]{\frac{6\cdot\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{3}}}.$$

Řešení.

$$\sqrt[6]{\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}}:\sqrt[3]{\frac{6\cdot\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{3}}}=\frac{5^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{18}}\cdot3^{\frac{1}{6}}\cdot5^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{6}}\cdot5^{\frac{1}{6}}}=\frac{3^{\frac{1}{18}}}{2^{\frac{3}{6}}}=\frac{\sqrt[18]{3}}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[18]{3}}{2}}}=$$

$$=2^{-\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{18}}$$

□

Příklad 2.3. Zjednodušte výraz

$$\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}.$$

Řešení.

$$\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}-1}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}=a^{\frac{2+3}{6}\cdot\frac{3}{5}}=a^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{a}}},\ a\neq0$$

Exponent můžeme vypočítat najednou:

$$\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}} = a^t = \left| t = -\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{5}\cdot\frac{3-6-2}{6} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{-5}{6} = \frac{1}{2}\right| =$$

$$= a^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{a}}},\ a \neq 0$$

Ve výsledku je uvedena podmínka $a \neq 0$. Podmínku $a \geq 0$ psát nemusíme – tato podmínka je zřejmá z výsledku, protože zadaný i výsledný výraz nejsou pro záporná čísla a definovány. Podmínka $a \neq 0$ je nutná, protože do výsledku se dá $a = 0$ dosadit, do zadaného výrazu ne. Musíme uvádět podmínky, za kterých rovnost zadaného výrazu a výsledku platí.

□

Cvičení

Zjednodušte následující výrazy tak, aby ve výsledku bylo co nejméně racionálních exponentů (tj. odmocnin). Uveďte podmínky, za kterých je výsledek roven zadanému výrazu.

1) $\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} : \left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

2) $\frac{\sqrt[12]{a^5}\cdot b^{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{b^{-1}}}{a^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ $[\sqrt{a},\ a \neq 0, b > 0]$

3) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt{a^3}}}$ $\left[\frac{1}{a},\ a > 0\right]$

4) $\frac{\sqrt{a\sqrt{b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{ba^{-3}}}}$ $\left[\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[12]{b},\ a > 0, b \neq 0\right]$

5) $\sqrt[3]{\frac{x^2\sqrt{x^{-5}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt[9]{x^2}},\ x > 0\right]$

6) $\frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}} : \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$ $\left[\sqrt[6]{ab},\ a \neq 0, b \neq 0\right]$

7) $\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{1}{a^5}}}}\right)^{-1}$ $\left[\sqrt[8]{a^{13}},\ a \neq 0\right]$

8) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}$ $[\sqrt[12]{x}]$

2.1.3 Úpravy výrazů za použití známých pravidel

Poznámka 2.4. Při úpravách nejdříve rozkládáme na součin a až v případě nezbytnosti nakonec roznásobujeme – často půjde krátit. Podle postupu úpravy se pozná, jestli se předem zamyslíme, nebo jestli mechanicky použijeme první úpravu, která nás napadne. Důležitější než výsledek je postup výpočtu.

Příklad 2.5. Zjednodušte výraz

$$\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a^2-a}.$$

Řešení.

$$\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a^2-a}=\frac{(a-1)^2-a^2-1}{a\,(a-1)}=\frac{\cancel{a^2}-2a+\cancel{1}-\cancel{a^2}-\cancel{1}}{a\,(a-1)}=\frac{-2\cancel{a}}{\cancel{a}(a-1)}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{-2}{a-1}}},\ a\neq 0$$

Pro $a=1$ není definován ani výsledek – podmínku $a\neq 1$ nemusíme uvádět.

□

Příklad 2.6. Určete hodnotu výrazu

$$\left[\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\right]$$

v bodě a) $a=2$, b) $b=-\frac{1}{2}$.

Řešení. Nejdříve výraz zjednodušíme, potom dosadíme. Tedy

$$\left[\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\right]=$$

$$=\frac{a^4+b^4-a^3b-ab^3}{a^2b^2}:\left[\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{ab}\right]=$$

$$=\frac{a^4+b^4-a^3b-ab^3}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(b-a)^2}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2+ab}=$$

$$=\frac{a^4+b^4-a^3b-ab^3}{1}\cdot\frac{ab}{(b^2-2ab+a^2)\cdot(a^2+b^2+ab)}=$$

$$=\frac{(a^4+b^4-a^3b-ab^3)\cdot ab}{\cancel{a^2b^2}+b^4+\underline{ab^3}-\underline{\underline{2a^3b}}-\underline{2ab^3}-\cancel{2a^2b^2}+a^4+\cancel{a^2b^2}+\underline{\underline{a^3b}}}=\frac{(a^4+b^4-a^3b-ab^3)\cdot ab}{a^4+b^4-a^3b-ab^3}=$$

$$=\underline{\underline{ab}}.$$

Po dosazení dostáváme a) $2b$, b) $-\frac{a}{2}$.

Nyní zkusíme jiný postup, dosadíme přímo do zadání a upravíme získaný výraz. Tedy pro $a = 2$ dostáváme

$$\left[\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\right]\Bigg|_{a=2} =$$

$$\left[\frac{4}{b^2}+\frac{b^2}{4}-\frac{2}{b}-\frac{b}{2}\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{b}+\frac{b}{2}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{16+b^4-8b-2b^3}{4b^2}:\left[\left(\frac{b-2}{2b}\right)^2\cdot\frac{4+b^2+2b}{2b}\right] =$$

$$= \frac{16+b^4-8b-2b^3}{\cancel{4b^2}}\cdot\frac{\cancel{4b^2}}{b^2-4b+4}\cdot\frac{2b}{b^2+2b+4} =$$

$$= 2b\cdot\frac{b^4-2b^3-8b+16}{b^4+\underline{2b^3}+\cancel{4b^2}-\underline{4b^3}-\cancel{8b^2}-\underline{\underline{16b}}+\cancel{4b^2}+\underline{\underline{8b}}+16} = 2b\cdot\frac{b^4-2b^3-8b+16}{b^4-2b^3-8b+16} = \underline{\underline{2b}}.$$

Dále pro $b = -\frac{1}{2}$ dostáváme

$$\left[\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\right]\Bigg|_{b=-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[4a^2+\frac{1}{4a^2}-\left(-2a-\frac{1}{2a}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{a}+2\right)^2\cdot\left(-2a-\frac{1}{2a}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{16a^4+1+8a^3+2a}{4a^2}\cdot\left(\frac{a}{1+2a}\right)^2\cdot\frac{2a}{-4a^2-1+2a} =$$

$$= -\frac{a}{2}\cdot\frac{16a^4+8a^3+2a+1}{(1+4a+4a^2)(1-2a+4a^2)} =$$

$$= -\frac{a}{2}\cdot\frac{16a^4+8a^3+2a+1}{1-\underline{2a}+\cancel{4a^2}+\underline{4a}-\cancel{8a^2}+\underline{\underline{16a^3}}+\cancel{4a^2}-\underline{\underline{8a^3}}+16a^4} = \underline{\underline{-\frac{a}{2}}}.$$

Máme-li počítat hodnotu upravovaného výrazu pro dvě různé konkrétní hodnoty proměnných, je zřejmě obecně výhodnější zjednodušit zadaný výraz a dosazovat až do výsledku. Jestliže máme vypočítat hodnotu výrazu pro konkrétní hodnoty všech v něm obsažených proměnných (a jen jeden takový případ), je vhodné dosadit přímo do neupraveného výrazu a počítat s čísly.

Pro zopakování látky ze základní školy najdeme hodnotu výrazu pro $a = 2$ a současně

$b = -\frac{1}{2}$ (bez použití kalkulačky), tedy

$$\left[\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\right] : \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\right]\Bigg|_{a=2 \wedge b=-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[16 + \frac{1}{16} - \left(-4 - \frac{1}{4}\right)\right] : \left[\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 \cdot \left(-4 - \frac{1}{4} + 1\right)\right] =$$

$$= \left[16 + 4 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right] : \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(-3 - \frac{1}{4}\right)\right] = \left(20 + \frac{5}{16}\right) \cdot \frac{4}{25} \cdot \left(-\frac{4}{13}\right) =$$

$$= -\frac{(16 \cdot 20 + 5) \cdot \cancel{16}}{\cancel{16} \cdot 25 \cdot 13} = -\frac{\cancel{5} \cdot (16 \cdot 4 + 1)}{\cancel{5} \cdot 5 \cdot 13} = -\frac{64 + 1}{65} = \underline{\underline{-1}}.$$

□

Příklad 2.7. Zjistěte, pro která a je hodnota výrazu

$$\frac{4a^{-\frac{1}{2}}}{1 - (1 + \sqrt{a})^2 (1 - \sqrt{a})^{-2}} \cdot \frac{a}{(1 - \sqrt{a})^2}$$

rovna -1.

Řešení. Nejdříve zjistíme, pro která a je výraz definován. Vystupuje zde $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, a dále ve jmenovateli $1 - \sqrt{a}$, tedy musí platit $a > 0 \wedge a \neq 1$. Tedy

$$\frac{4a^{-\frac{1}{2}}}{1 - (1 + \sqrt{a})^2 (1 - \sqrt{a})^{-2}} \cdot \frac{a}{(1 - \sqrt{a})^2} = \frac{4a^{-\frac{1}{2}+1}}{\left[1 - \frac{(1+\sqrt{a})^2}{(1-\sqrt{a})^2}\right] \cdot (1 - \sqrt{a})^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})^2 - (1 + \sqrt{a})^2} = \frac{4\sqrt{a}}{1 - 2\sqrt{a} + a - (1 + 2\sqrt{a} + a)} = \left| \begin{array}{l} \text{nebo jako} \\ \text{rozdíl čtverců} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a} - 1 - \sqrt{a})(1 - \sqrt{a} + 1 + \sqrt{a})} = \frac{4\sqrt{a}}{-4\sqrt{a}} = \underline{\underline{-1}}$$

pro všechna $a > 0$, $a \neq 1$. □

Cvičení

Zjednodušte následující výrazy (tak, aby vyšel uvedený výsledek). Udejte podmínky, za kterých se výsledný výraz rovná zadanému.

1) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ $[2,\ x \neq 1,\ x \neq -1]$

2) $\frac{x^2-8x+16}{3x-12}$ $\left[\frac{x-4}{3},\ x \neq 4\right]$

3) $\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+z)^2-y^2}$ $\left[\frac{x+y-z}{x-y+z},\ y \neq -(x+z)\right]$

4) $\frac{96a^3b^7-24a^5b^5}{24a^5b^6-12a^6b^5}$ $\left[\frac{2(2b+a)}{a^2},\ b \neq 0,\ a \neq 2b\right]$

5) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2$ $\left[(a+b)^2,\ a \neq b \neq 0\right]$

6) $\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)^2$ $[4x^2y^2]$

7) $\left(\frac{u}{u-v}-\frac{v}{u+v}\right) : \left(\frac{v}{u-v}+\frac{u}{u+v}\right)$ $[1,\ u \neq \pm v,\ u \neq 0 \vee v \neq 0]$

2.1.4 Úprava na součin (resp. podíl) jednoduchých (obvykle lineárních) výrazů

Při rozkladu kvadratických výrazů (levých stran kvadratických rovnic) využíváme vztahů mezi kořeny rovnice a jejími koeficienty. Má-li rovnice

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)=0$$

kořeny x_1, x_2, pak platí

$$x_1+x_2=-b, \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

Nebo kořeny rovnice $ax^2+bx+c=0$ vypočítáme pomocí známého vzorce.

Příklad 2.8. Rozložte na součin:

$$x^5-x^4-56x^3.$$

Řešení.

$$x^5-x^4-56x^3 = x^3\left(x^2-x-56\right) = \left| \begin{array}{c} -56=-8\cdot 7 \\ -8+7=-1 \end{array} \right| = \underline{\underline{x^3\,(x+8)\,(x-7)}}$$

□

Příklad 2.9. Čitatele i jmenovatele rozložte na součin:

$$\frac{a^4-a^3b+b^4-ab^3}{(b-a)\left(a^2+b^2+ab\right)}.$$

Řešení.

$$\frac{a^4-a^3b+b^4-ab^3}{(b-a)\left(a^2+b^2+ab\right)} = \frac{a^3\,(a-b)-b^3\,(a-b)}{b^3-a^3} = \frac{(a-b)\cancel{(a^3-b^3)}}{-\cancel{(a^3-b^3)}} = \underline{\underline{b-a}}, \quad a \neq b$$

□

Příklad 2.10. Upravte na jeden zlomek a čitatele i jmenovatele rozložte na součin:

$$\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(2x^2-1\right)-4x^2\sqrt{x^2+1}.$$

Řešení.

$$\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(2x^2-1\right)-4x^2\sqrt{x^2+1}=\frac{\left(x^2+1+x^2\right)\left(2x^2-1\right)-4x^2\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{\left(2x^2+1\right)\left(2x^2-1\right)-4x^4-4x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\cancel{4x^4}-1-\cancel{4x^4}-4x^2}{\sqrt{x^2+1}}=-\underline{\underline{\frac{4x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}}$$

□

Cvičení

Proveďte úpravy s využitím postupů v předchozích příkladech.

1) x^4+2x^2-3 $\quad\left[\left(x^2+3\right)(x-1)(x+1)\right]$

2) x^4-13x^2+40 $\quad\left[\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\right]$

3) $3x^3-2x^2-5x$ $\quad\left[x(3x-5)(x+1)\right]$

4) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-2x^2-3x}$ $\quad\left[\frac{x-1}{x},\ x\neq 3,\ x\neq -1\right]$

5) $\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}+\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ $\quad\left[\frac{3x}{\sqrt[3]{(x-1)(2x+1)^2}}\right]$

2.1.5 Rozklad polynomu v reálném oboru pomocí Hornerova schématu

Příklad 2.11. Je dán polynom

$$P(t)=t^5-22t^4+175t^3-652t^2+1408t-1792,$$

jehož reálné kořeny jsou celočíselné. Najděte jeho rozklad v reálném oboru.

Řešení. Polynom je pátého stupně a tedy v oboru komplexních čísel bude mít celkem pět kořenů. Pokud má polynom komplexní kořen, pak je vždy jeho kořenem také číslo komplexně sdružené. Slangově se říká, že komplexní kořeny „chodí v párech“ a polynom lichého stupně musí mít alespoň jeden kořen reálný, který se pokusíme nalézt jako první. Zadání je zvoleno tak, aby reálné kořeny polynomu byla celá čísla, a proto hledáme reálné celé číslo.

Víme, že kořen polynomu musí dělit absolutní člen, což je v tomto případě číslo 1792. Rozklad absolutní hodnoty tohoto čísla na prvočísla je $1792=2^8\cdot 7$, takže je výhodné zkoušet mocniny 2 a číslo 7, tj. čísla $\pm1,\pm7,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm32,\pm64,\pm128,\pm256$.

Postupným použitím Hornerova schématu dostáváme:

	1	-22	175	-625	1408	-1792
~~7~~	~~1~~	~~-15~~	~~70~~	~~-162~~	~~247~~	~~126~~
~~-7~~	~~1~~	~~-29~~	~~378~~	~~-3271~~	~~24305~~	~~171927~~
~~2~~	~~1~~	~~-20~~	~~135~~	~~-382~~	~~644~~	~~-504~~
~~-2~~	~~1~~	~~-24~~	~~223~~	~~-1098~~	~~3604~~	~~-900~~
4	1	-18	103	-240	448	$\underline{\underline{0}}$

Jeden reálný kořen je 4 a platí

$$P(t) = (t-4)(t^4 - 18t^3 + 103t^2 - 240t + 448).$$

Postup opakujeme. Rozklad absolutního členu na prvočísla je $448 = 2^6 \cdot 7$. Budeme tedy zkoušet čísla $\pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64$. Čísla $7, -7, 2, -2$ již nezkoušíme, protože víme, že nejsou kořeny původního polynomu a nemohou tedy být kořeny ani tohoto.

	1	-18	103	-240	448
~~4~~	~~1~~	~~-14~~	~~47~~	~~-52~~	~~240~~
~~-4~~	~~1~~	~~-22~~	~~191~~	~~-1004~~	~~4464~~
8	1	-10	23	-56	0
8	1	-2	7	0	

Číslo 8 je dvojnásobným kořenem a platí

$$P(t) = (t-4)(t-8)^2(t^2 - 2t + 7).$$

Kořeny polynomu $t^2 - 2t + 7$ můžeme najít pomocí vzorce $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-7}$, kořeny jsou komplexní. Rozklad polynomu v reálném oboru má tedy tvar

$$\underline{\underline{P(t) = (t-4)(t-8)^2(t^2 - 2t + 7)}}.$$

□

Příklad 2.12. Rozložte v reálném oboru polynom

$$P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x = x\left(x^3 - 7x^2 + 14x - 8\right).$$

Řešení. Potenciální kořeny jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

	1	-7	14	-8
1	1	-6	8	$\underline{\underline{0}}$
2	1	-4	$\underline{\underline{0}}$	

$$P(x) = x(x-1)(x^2 - 6x + 8)$$

$$\underline{\underline{P(x) = x(x-1)(x-2)(x-4)}}$$

Polynom druhého stupně $x^2 - 6x + 8$ jsme mohli rozložit i bez Hornerova schématu.

□

Příklad 2.13. Rozložte v reálném oboru polynom

$$P(x) = 2x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 14x^2 + 6x + 1.$$

Řešení.

	2	9	16	14	6	1	
-1	2	7	9	5	1	$\underline{\underline{0}}$	$P(x) = (x + 1)(2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 5x + 1)$
-1	2	5	4	1	$\underline{\underline{0}}$		$P(x) = (x + 1)^2(2x^3 + 5x^2 + 4x + 1)$
-1	2	3	1	$\underline{\underline{0}}$			$P(x) = (x + 1)^3(2x^2 + 3x + 1)$
-1	2	1	$\underline{\underline{0}}$				$\underline{\underline{P(x) = (x + 1)^4(2x + 1)}}$

□

Příklad 2.14. Rozložte v reálném oboru polynom

$$P(x) = 4x^6 - x^5 + 8x^3 - 38x^2 + 33x - 6.$$

Řešení. Potenciální kořeny jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

	4	-1	0	8	-38	33	-6	
1	4	3	3	11	-27	6	$\underline{\underline{0}}$	$P(x) = (x - 1)(4x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 27x + 6)$
1	4	7	10	21	-6	$\underline{\underline{0}}$		$P(x) = (x - 1)^2(4x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 21x - 6)$
~~1~~	~~4~~	~~11~~	~~21~~	~~42~~	~~36~~			
~~-1~~	~~4~~	~~3~~	~~-7~~	~~28~~	~~-34~~			
-2	4	-1	12	-3	$\underline{\underline{0}}$			$P(x) = (x - 1)^2(x + 2)(4x^3 - x^2 + 12x - 3)$

Při hledání kořenů polynomu pomocí Hornerova schématu se nemusíme omezit jen na celočíselné koeficienty. Pro polynom 3. stupně platí

$$a_0 = -a_3 x_1 x_2 x_3,$$

což v našem případě znamená

$$-3 = -4 x_1 x_2 x_3,$$

tedy v úvahu přichází kořen $x_1 = 1/4$:

	4	-1	12	-3	
1/4	4	0	12	$\underline{\underline{0}}$	$P(x) = (x - 1)^2(x + 2)\left(x - \frac{1}{4}\right)(4x^2 + 12)$

Výsledek můžeme ještě upravit a dostaneme

$$P(x) = \underline{\underline{(x - 1)^2(x + 2)(4x - 1)\left(x^2 + 3\right)}}$$

□

Příklad 2.15. Rozložte v reálném oboru polynom

$$P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2.$$

Řešení. Nemusíme použít Hornerovo schéma – rozložíme pomocí vytýkání:

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x^3 + x^2 - x - 1) = x^2\left(x^2(x+1) - (x+1)\right) =$$
$$= x^2(x+1)(x^2-1) = \underline{\underline{x^2(x+1)^2(x-1)}}$$

□

Cvičení

Následující polynomy rozložte v reálném oboru.

1) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ $\quad [(x^2+1)(x-1)^2]$

2) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ $\quad [x(x-1)(x-2)(x-3)]$

3) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ $\quad [(x+1)(x+2)^2]$

4) $x^5 - 5x^3 + 4x$ $\quad [x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)]$

5) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ $\quad [(x-1)^3(x-2)]$

6) $x^7 - 6x^5 + 9x^3 - 4x$ $\quad [x(x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x+2)]$

7) $x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad [(x+1)(x^2+1)]$

8) $x^5 + x^3 - 2x^2 - 12x - 8$ $\quad [(x+1)^2(x-2)(x^2+4)]$

9) $x^4 + 1$ $\quad \left[\left(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1\right)\right]$

10) $x^6 - 4x^5 + x^4 + 6x^3 + 20x^2 - 56x + 32$ $\quad [(x-1)(x-2)^3(x^2+3x+4)]$

11) $x^6 - 64$ $\quad [(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)]$

12) $x^6 + x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x$ $\quad [x(x-1)^2(x+3)(x^2+1)]$

2.2 Rovnice

Řešení rovnic je první situace, ve které použijeme úpravy zadaných výrazů. Zde je účel zřejmý – pomocí úprav chceme najít výraz, ze kterého přímo poznáme řešení. Během úprav musíme sledovat, zda se jedná o ekvivalentní úpravy (jestli jsme nějaké řešení „neztratili“, nebo „nepřidali“). Obvykle se nejjednodušeji přesvědčíme zkouškou.

Ekvivalentními úpravami rovnic rozumíme

- záměnu stran rovnice,
- přičtení téhož čísla nebo výrazu k oběma stranám rovnice,
- násobení obou stran rovnice týmž nenulovým číslem nebo výrazem.

Tedy takovou úpravu, po které je původní výraz (rovnice) ***ekvivalentní*** s výrazem (rovnicí), který po úpravě dostaneme.

Důsledkové (implikační) ***úpravy*** jsou takové úpravy, po kterých zadaný výraz ***implikuje*** výsledný. Tedy zejména

- umocnění obou stran rovnice,
- násobení obou stran rovnice výrazem.

Jinými slovy: Jsou-li $L(x)$, $P(x)$ výrazy, potom $\forall x \in D_L \cap D_R$ platí:

$$L(x) = P(x) \Rightarrow (L(x))^n = (P(x))^n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$L(x) = P(x) \Rightarrow L(x) \cdot V(x) = P(x) \cdot V(x) \quad \text{jestliže} \quad D_V \supseteq D_L \cap D_R,$$

tedy je-li výraz V definován všude v definičním oboru rovnice.

Připomeňme si, že implikace je nepravdivá pouze při jedné kombinaci pravdivostních hodnot jednotlivých výroků – z jedné nemůže plynout nula; z nuly plyne cokoliv.

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & 2 & \text{je nepravda} \\ & \Downarrow & & \\ 1\cdot 2 & = & 2\cdot 2 & \underline{\text{je nepravda}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} 1 & = & 2 & \text{je nepravda} \\ & \Downarrow & & \\ 1\cdot 0 & = & 2\cdot 0 & \underline{\text{je pravda}} \end{array}$$

2.2.1 Řešení rovnic a diskuze vzhledem k ekvivalenci příslušných úprav

Příklad 2.16. Řešte rovnici a proveďte diskuzi o ekvivalenci použitých úprav:

$$5x + [4x - 8(x + 6)] = 3 + x.$$

Řešení.

$$5x + [4x - 8(x + 6)] = 3 + x$$

$$5x + 4x - 8x - 48 = 3 + x$$

$$\cancel{x} - 48 = 3 + \cancel{x} \quad \textbf{rovnice nemá řešení}$$

Všechny úpravy jsou ekvivalentní – pouze jsme provedli naznačené aritmetické operace.

□

Příklad 2.17. Řešte rovnici a proveďte diskuzi o ekvivalenci použitých úprav:

$$\frac{2\,(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9 - \frac{5\,(x+1)}{8}.$$

Řešení.

$$\frac{2\,(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9 - \frac{5\,(x+1)}{8} \quad \Big|\cdot 88$$

$$16\,(x-1) - 44\,(x-3) = 9 \cdot 88 - 55\,(x+1)$$

$$16x - 44x + 55x = 16 - 3 \cdot 44 + 9 \cdot 88 - 55$$

$$27x = 621 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 23}}$$

Všechny úpravy jsou ekvivalentní – násobili jsme číslem.

□

Příklad 2.18. Řešte rovnici a proveďte diskuzi o ekvivalenci použitých úprav:

$$\frac{3+2x}{2} - \left(\frac{7}{6} - \frac{12x-1}{3}\right) = 5x.$$

Řešení.

$$\frac{3+2x}{2} - \left(\frac{7}{6} - \frac{12x-1}{3}\right) = 5x \mid \cdot 6$$

$$9 + 6x - 7 + 24x - 2 = 30x$$

$$0 = 0 \quad \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$$

Ekvivalentními úpravami jsme dostali tautologii, rovnice se změní v identitu dosazením libovolného reálného čísla.

□

Příklad 2.19. Řešte rovnici a proveďte diskuzi o ekvivalenci použitých úprav:

$$2 + \frac{3}{x+7} = \frac{x+10}{x+7}.$$

Řešení.

$$2 + \frac{3}{x+7} = \frac{x+10}{x+7} \quad \Big| \cdot (x+7) \quad x \neq -7$$

$$2(x+7) + 3 = x + 10$$

$x = -7$ Spor s podmínkou $x \neq -7$, **rovnice nemá řešení**.

Násobení jmenovatelem $x + 7$ není ekvivalentní úprava. Původní a vzniklá rovnice mají různý obor pravdivosti. Kdybychom chtěli provést zkoušku, $x = -7$ nemůžeme dosadit.

□

Cvičení

Řešte zadané rovnice a proveďte diskusi vzhledem k ekvivalenci příslušných úprav.

1) $(x+1)^2 = (x-3)(x+2) + 3x$ [nemá řešení]

2) $\frac{3+2x}{2} - \left(\frac{7}{6} - \frac{12x-1}{3}\right) = 5x$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

3) $\frac{2}{2-x} + \frac{x-2}{2} = \frac{x^2}{2(x+2)}$ $\left[x = -\frac{2}{3}\right]$

4) $\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}-x} + \frac{8}{3} = 0$ $[x = 2]$

5) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{x-3}{x+3} - \frac{x-4}{x+4}$ $\left[x = 0 \vee x = -\frac{5}{2}\right]$

6) $\frac{3}{(2x+5)^2} + \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{7}{4x^2+12x+5}$ $\left[x = -\frac{17}{2}\right]$

2.2.2 Kvadratické rovnice

Kvadratické rovnice se dají řešit pomocí vzorce pro výpočet jejích kořenů. Zajímavější (a většinou i rychlejší) postup je použití vztahů mezi kořeny a koeficienty rovnice (získaných rozkladem na součin kořenových činitelů):

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2,$$

z čehož plyne

$$b = -a(x_1 + x_2), \quad c = ax_1x_2$$

a speciálně pro $a = 1$ dostáváme

$$b = -(x_1 + x_2), \quad c = x_1x_2.$$

Na řešení kvadratických rovnic povedou mnohé úlohy v dalších kapitolách.

Příklad 2.20. Řešte rovnici:

$$(2x - 10)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Řešení. Rovnice je přímo ve tvaru součinu kořenových činitelů. Odtud bezprostředně plyne

$$2x - 10 = 0 \quad \vee \quad x + \frac{1}{2} = 0,$$

neboli součin je roven nule, je-li alespoň jeden činitel nulový. Tedy

$$\underline{\underline{x_1 = 5, x_2 = -\frac{1}{2}.}}$$

□

Příklad 2.21. Řešte rovnici:

$$3x^2 + 5x = 0.$$

Řešení. Vytkneme x a tím převedeme na součin kořenových činitelů

$$x(3x+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{3}}}.$$

□

Příklad 2.22. Řešte rovnici:

$$3x^2 - 27 = 0.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 0 \,|\, /3 \\ x^2 - 9 &= 0 \quad \text{(rozdíl čtverců)} \\ (x-3)(x+3) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 3, x_2 = -3}} \end{aligned}$$

□

Příklad 2.23. Řešte rovnici:

$$x^2 + 14x + 24 = 0.$$

Řešení. Využijeme vztahu mezi kořeny a koeficienty

$$14 = 12 + 2, \quad 24 = 12 \cdot 2.$$

Tedy

$$x^2 + 14x + 24 = (x+12)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = -2, x_2 = -12}}.$$

□

Příklad 2.24. Řešte rovnici:

$$x^2 + 8x + 9 = 0.$$

Řešení. Použijeme vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice se sudým koeficientem u x^1, tedy

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-9}}{1} = \underline{\underline{-4 \pm \sqrt{7}}}.$$

□

Příklad 2.25. Řešte rovnici:

$$(4x+5)(x-2) = 10 - (3x-5)(x-4).$$

Řešení. Zde není jiná možnost než roznásobit, tedy

$$
\begin{aligned}
4x^2-8x+5x-10 &= 10-(3x^2-12x-5x+20)\\
4x^2-3x-\cancel{10} &= \cancel{10}-3x^2+17x-\cancel{20}\\
7x^2-20x &= 0\\
x(7x-20) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1=0, x_2=\frac{20}{7}}}.
\end{aligned}
$$

□

Příklad 2.26. Řešte rovnici:

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}.$$

Řešení.

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1} \quad \left|2x^2+7x-4=(x+4)(2x-1)\right|,\ x\neq -4, x\neq \frac{1}{2}$$

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1} \quad \Big| \cdot (x+4)(2x-1)$$

$$
\begin{aligned}
2x^2+7x-4+2x(2x-1)+27 &= 6(x+4)\\
2x^2+7x-4+4x^2-2x+27 &= 6x+24\\
6x^2-x-1 &= 0
\end{aligned}
$$

Použijeme vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice a dostaneme

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\end{cases}, \qquad \text{kde } x=\frac{1}{2} \text{ nevyhovuje podmínce } x\neq\frac{1}{2}.$$

Rovnice má tedy jediné řešení

$$\underline{\underline{x=-\frac{1}{3}}}.$$

□

Příklad 2.27. Řešte rovnici:

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-3\frac{x-1}{x+1}=4.$$

Řešení. Pro $x \neq -1$ je možné umocnit a násobit výrazem $(x+1)^2$. Výhodnější je však položit

$$t := \frac{x-1}{x+1},$$

čímž dostaneme kvadratickou rovnici v proměnné t, tedy

$$\begin{aligned} t^2 - 3t - 4 &= 0 \\ (t-4)(t+1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4 \vee t = -1 \end{aligned}$$

Po zpětném dosazení dostaneme

$$\frac{x-1}{x+1} = 4 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad 3x = -5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{5}{3}}},$$

$$\frac{x-1}{x+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}.$$

□

2.2.3 Rovnice s odmocninami – iracionální rovnice

Při řešení iracionálních rovnic obvykle nevystačíme s ekvivalentními úpravami – bývá nutné obě strany rovnice umocňovat, tedy provést důsledkovou úpravu. Může se stát, že tím „přidáme“ řešení. Je vhodné nejdříve vyšetřit definiční obory výrazů na obou stranách rovnice, ovšem není to nutné – po důsledkové (tedy neekvivalentní) úpravě musíme závěrem vždy provést zkoušku.

Příklad 2.28. Řešte rovnici:

$$\frac{5 - 3\sqrt{x}}{4\sqrt{x} - 7} = \frac{6\sqrt{x} - 11}{15 - 8\sqrt{x}}.$$

Řešení. Nejdříve zjistíme, kde jsou výrazy na obou stranách rovnice definovány. Tedy

$$x \geq 0, \quad \sqrt{x} \neq \frac{7}{4}, \quad \sqrt{x} \neq \frac{15}{8}.$$

Položíme

$$t = \sqrt{x}, \quad \left(x = t^2\right)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{5-3t}{4t-7} &= \frac{6t-11}{15-8t} \quad \Big| \cdot (4t-7)(15-8t) \\ (5-3t)(15-8t) &= (6t-11)(4t-7) \end{aligned}$$

$$\cancel{24t^2} - \underbrace{(45+40)}_{85} t + 75 = \cancel{24t^2} - \underbrace{(42+44)}_{86} t + 77$$

$$t = 2 \left(= \sqrt{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 4}}.$$

□

Příklad 2.29. Řešte rovnici:

$$x + \sqrt{x^2 - 9} = 21.$$

Řešení. Musí platit $x^2 \geq 9$. Dále

$$\sqrt{x^2 - 9} = 21 - x \;\Big|^2.$$

Umocnění obou stran rovnice **není ekvivalentní úprava**, neboť

$$x^2 - 9 = (21 - x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{x^2 - 9} = 21 - x\ !$$

Potom

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 9} &= 21 - x \;|^2 \\ x^2 - 9 &= (21 - x)^2 \\ x^2 - 9 &= x^2 - 42x + 441 \\ 42x = 450 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{450}{42} = \frac{75}{7}. \end{aligned}$$

Nyní musíme udělat zkoušku a tím zjistit, řešení které ze dvou rovnic jsme našli:

$$\frac{75}{7} + \sqrt{\frac{75^2}{49} - 9} = \frac{75}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{5625 - 441} = \frac{1}{7}\left(75 + \sqrt{5184}\right) = \frac{75 + 72}{7} = \frac{147}{7} = 21 \text{ vyhovuje}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{75}{7}}}.$$

□

Příklad 2.30. Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x - 5.$$

Řešení. Musí platit $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \geq 0$. Dále

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 6x + 9} &= x - 5 \;\;|^2 \\ \cancel{x^2} + 6x + 9 &= 25 - 10x + \cancel{x^2} \\ 16x = 16 \quad &\Rightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$

Zkouška:

$\sqrt{1 + 6 + 9} = 1 - 5 \Leftrightarrow \sqrt{16} = -4$ nevyhovuje; $x = 1$ není řešení $\Rightarrow$ **rovnice nemá řešení**

□

Příklad 2.31. Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2+6x+9} = 5-x.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+6x+9} &= 5-x \quad \Big|^2 \\ \cancel{x^2}+6x+9 &= 25-10x+\cancel{x^2} \\ 16x = 16 \quad &\Rightarrow \quad x=1. \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\sqrt{1+6+9} = 5-1 \Leftrightarrow \quad \sqrt{16}=4 \quad \text{vyhovuje;} \quad \underline{\underline{x=1}} \quad \textbf{je řešení}$$

□

Příklad 2.32. Řešte rovnici:

$$\sqrt{3x-3}-\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=0.$$

Řešení. Musí platit

$$x \geq 1 \ \wedge x \geq 0 \ \wedge \ x \geq 3 \quad \Rightarrow \underline{x \geq 3}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-3} &= \sqrt{x}+\sqrt{x-3} \ \Big|^2 \\ 3x-3 &= x+2\sqrt{x(x-3)}+x-3 \\ x &= 2\sqrt{x(x-3)} \ \Big|^2 \\ x^2 &= 4x(x-3) \qquad x=0 \quad \vee \quad x=4x-12 \quad x=0 \ \text{nevyhovuje podmínce } x \geq 3 \\ x &= 4x-12 \Leftrightarrow 3x=12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=4} \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\sqrt{12-3}-\sqrt{4}-\sqrt{4-3}=3-2-1=0 \quad \underline{\underline{x=4}} \quad \textbf{je řešení}.$$

□

Příklad 2.33. Řešte rovnici:

$$\sqrt{3+x-4\sqrt{1-x}}-\sqrt{x}=0.$$

Řešení. Musí platit

$$x \geq 0, \ \ x \leq 1, \ \ 3+x \geq 4\sqrt{1-x}.$$

Poslední podmínku prověříme později dosazením. Dále

$$\sqrt{3+x-4\sqrt{1-x}} = \sqrt{x} \ \Big|^2$$

$$3 + x - 4\sqrt{1-x} = x$$
$$3 = 4\sqrt{1-x}\ \Big|^2$$
$$9 = 16(1-x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{16}, \quad \frac{7}{16} \in \langle 0, 1\rangle\,.$$

Dosadíme do třetí podmínky:

$$3 + \frac{7}{16} \geq 4\sqrt{1 - \frac{7}{16}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{48+7}{16} \geq \sqrt{\frac{16-7}{16}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{55}{16} \geq \frac{3}{4} = \frac{12}{16} \quad \text{platí.}$$

Zkouška:

$$\sqrt{3 + \frac{7}{16} - 4\sqrt{1 - \frac{7}{16}}} - \sqrt{\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{48+7}{16} - 4\sqrt{\frac{16-7}{16}}} - \sqrt{\frac{7}{16}} =$$
$$= \sqrt{\frac{55}{16} - 4\cdot\sqrt{\frac{9}{16}}} - \sqrt{\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{55}{16} - 4\cdot\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{55-48}{16}} - \sqrt{\frac{7}{16}} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{7}{16}}} \quad \textbf{je řešení.}$$

$\square$

Cvičení

Řešte zadané rovnice.

1) $\sqrt{x^2+7} = 2x+2$ $\quad [x = \frac{1}{3}]$

2) $\sqrt{31+x-x^2} = 5-x$ $\quad [x = -\frac{1}{2}]$

3) $2x-6 = \sqrt{6x-x^2-5}$ $\quad [x = \frac{1}{5}\left(15+2\sqrt{5}\right)]$

4) $\frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1} = 1$ $\quad [x = 1]$

5) $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$ $\quad [x = 1]$

6) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 2$ $\quad [x \in \emptyset]$

2.2.4 Rovnice s absolutní hodnotou

Při řešení těchto rovnic používáme předpis pro definici absolutní hodnoty

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

a reálnou osu rozdělíme na intervaly, ve kterých žádný výraz uvnitř absolutní hodnoty nemění znaménko.

Příklad 2.34. Řešte rovnici:

$$|x-2| + |x+2| = 2x+2.$$

Řešení.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \qquad |x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}$$

Dostáváme tři intervaly $(-\infty, -2)$, $\langle -2, 2)$, $\langle 2, \infty)$.

1) $x \geq 2: \quad x-2+x+2 = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 0 = 2$ nemá řešení

2) $-2 \leq x < 2: \; 2-x+x+2 = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 2x = 2 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = 1}, \quad 1 \in \langle -2, 2)$ vyhovuje

3) $x < -2: \; -x+2-x-2 = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 4x = -2 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}$ nevyhovuje $x < -2$

Řešení je $\underline{\underline{x = 1}}$.

□

Příklad 2.35. Řešte rovnici:

$$|x-3| + 3\,|x-1| = 2x+1.$$

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladě provedeme rozdělení na intervaly.

1) $x \geq 3: \; x-3+3x-3 = 2x+1 \;\Leftrightarrow\; 2x = 7 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = \frac{7}{2}}$

2) $1 \leq x < 3: \; 3-x+3x-3 = 2x+1 \;\Leftrightarrow\; 0 = 1$ nemá řešení

3) $x < 1: \; 3-x-3x+3 = 2x+1 \;\Leftrightarrow\; 6x = 5 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = \frac{5}{6}}$

Řešení je $\underline{\underline{x = \frac{7}{2} \vee x = \frac{5}{6}}}$.

□

Příklad 2.36. Řešte rovnici:

$$|x-3| = 1-x.$$

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladě provedeme rozdělení na intervaly.

1) $x \geq 3:\quad x-3=1-x \;\Leftrightarrow\; 2x=4 \;\Leftrightarrow\; x=2$ nevyhovuje podmínce $x \geq 3$

2) $x < 3:\quad 3-x=1-x \;\Leftrightarrow\; 3=1$ nemá řešení

Rovnice nemá řešení.

Jiný postup:

$$
\begin{aligned}
|x-3| &= 1-x \quad \Big|^2 \\
(x-3)^2 &= (1-x)^2 \\
x^2-6x+9 &= 1-2x+x^2 \\
8x &= 8 \quad \Rightarrow \quad x=1
\end{aligned}
$$

Zkouška:

$$|-2| = 0 \quad \text{nevyhovuje}$$

Rovnice nemá řešení.

□

Příklad 2.37. Řešte rovnici:

$$\left|x^2+3x\right|-4=0.$$

Řešení. Upravíme rovnici jako

$$\left|x^2+3x\right|-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad |x\,(x+3)|-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|\,|x+3|-4=0.$$

Podobně jako v předchozím příkladě provedeme rozdělení na intervaly.

1) $x \geq 0:\quad x\,(x+3)-4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x-4=0 \;\Leftrightarrow\; (x+4)\,(x-1)=0$
$\underline{x=1} \;\vee\; x=-4,\quad x=-4$ nevyhovuje podmínce $x \geq 0$

2) $-3 \leq x < 0:\quad -x\,(x+3)=4 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x+4=0$ nemá řešení

3) $x < -3:\quad x\,(x+3)-4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x-4=0 \;\Leftrightarrow\; (x+4)\,(x-1)=0$
$x=1 \;\vee\; \underline{x=-4},\quad x=1$ nevyhovuje podmínce $x < -3$

Řešení je $\underline{\underline{x=1}} \vee \underline{\underline{x=-4}}$.

□

Příklad 2.38. Řešte rovnici:

$$||x|-2| = 2x+12.$$

Řešení. Můžou nastat dvě situace:

1) Pro $x \geq 0$ má rovnice tvar: $|x-2| = 2x+12$

2) Pro $x < 0$ má rovnice tvar: $|-x-2| = 2x+12 \;\Leftrightarrow\; |x+2| = 2x+12$

Tedy

1) $x \geq 0: \quad |x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$

a) $x \geq 2: \quad x - 2 = 2x + 12 \iff x = -14$ nevyhovuje podmínce $x \geq 2$

b) $0 \leq x < 2: \quad 2 - x = 2x + 12 \iff 3x = -10$ nevyhovuje podmínce $0 \leq x < 2$

2) $x < 0: \quad |-x-2| = |x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}$

a) $-2 \leq x < 0: \quad x+2 = 2x+12 \iff x = -10$ nevyhovuje podmínce $-2 \leq x < 0$

b) $x < -2: \quad -x - 2 = 2x + 12 \iff 3x = -14 \iff \underline{x = -\frac{14}{3}}$

Řešení je $\underline{\underline{x = -\frac{14}{3}}}$.

□

Cvičení

Řešte zadané rovnice s absolutní hodnotou.

1) $x^2 + 6\,|x| = 7$ $\quad [x = \pm 1]$

2) $\frac{|x|+3}{|x|-3} = 3$ $\quad [x = \pm 6]$

3) $|2x-5| - |4x+7| = 0$ $\quad \left[x = -\frac{1}{3} \vee x = -6\right]$

4) $|3 - |2-x|| - 2x = 0$ $\quad [x = 1]$

2.3 Nerovnice

Nerovnice řešíme analogicky jako rovnice pomocí ekvivalentních nebo důsledkových úprav. Přitom využíváme pravidla, která platí pro nerovnosti mezi reálnými čísly:

Tranzitivita: $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Připočtení (odečtení) čísla: $a > b \Rightarrow a + c > b + c \ \wedge \ a - c > b - c$

Násobení (dělení) číslem: $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc \wedge \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

$a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc \wedge \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Součet (rozdíl) nerovností: $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d \wedge a - d > b - c$

Součin (podíl) nerovností: $a > b > 0 \wedge c > d > 0 \Rightarrow ac > bd \wedge \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

Převrácená hodnota: $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Mocniny: $a > b > 0 \wedge r > 0 \Rightarrow a^r > b^r$

$a > b > 0 \wedge r < 0 \Rightarrow a^r < b^r$

$a > b \wedge c > 1 \Rightarrow c^a > c^b$

$a > b \wedge 0 < c < 1 \Rightarrow c^a < c^b$

2.3.1 Ukázka řešení jednoduchých nerovnic

Příklad 2.39. Řešte nerovnici:

$$(x-3)^2 < x(x+2)+3.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}(x-3)^2 &< x(x+2)+3\\ \cancel{x^2}-6x+9 &< \cancel{x^2}+2x+3\\ 6 < 8x \;&\Rightarrow\; \underline{\underline{x > \frac{3}{4}}}\end{aligned}$$

□

Příklad 2.40. Řešte nerovnici:

$$\frac{2x-1}{5}-\frac{3-2x}{4} < 3-\frac{x-1}{2}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{5}-\frac{3-2x}{4} &< 3-\frac{x-1}{2} \quad \Big| \cdot 20 \qquad 20>0,\ \text{znaménko nerovnosti se nemění}\\ 4(2x-1)-5(3-2x) &< 60-10(x-1)\\ 8x-4-15+10x &< 60-10x+10\\ 18x-19 &< 70-10x\\ 28x < 89 \;&\Rightarrow\; \underline{\underline{x < \frac{89}{28}}}\end{aligned}$$

□

Cvičení

Řešte nerovnice.

1) $\frac{3x-8}{4}-3 \geq \frac{5-2x}{3}+x$ $[x \geq 16]$

2) $\frac{x-2}{5}-\frac{3x-1}{6} > \frac{x}{4}+1-2x$ $\left[x > \frac{74}{87}\right]$

3) $\frac{4x-3}{5} \leq \frac{3x-4}{2}-\frac{2x-5}{3}$ $[x \geq -8]$

2.3.2 Nerovnice v součinovém nebo podílovém tvaru

Princip řešení těchto nerovnic spočívá v následujícím:

$$f \cdot g \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (f \geq 0 \wedge g \geq 0) \vee (f \leq 0 \wedge g \leq 0),$$

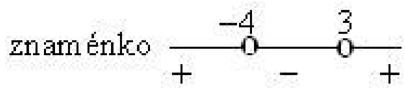
$$\frac{f}{g} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (f \geq 0 \wedge g > 0) \vee (f \leq 0 \wedge g < 0).$$

Reálnou osu tedy rozdělíme na intervaly pomocí bodů, ve kterých zkoumaný výraz nabývá hodnotu 0, a v těchto intervalech určíme jeho znaménko (můžeme dosadit některé body z jednotlivých intervalů).

Příklad 2.41. Řešte nerovnici:

$$(x-3)(x+4) > 0.$$

Řešení. Výraz na levé straně nabývá hodnoty 0 pro $x = 3$ nebo $x = -4$. V těchto hodnotách se mění jeho znaménko, přičemž nule roven není. Reálnou osu rozdělíme na tři intervaly a v nich vyšetříme znaménko součinu (můžeme dosadit postupně vybrané vhodné hodnoty, např $-5,\ 0,\ 5$).



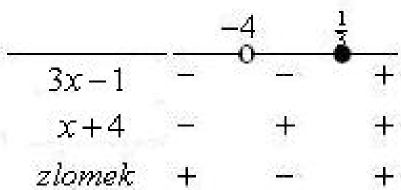
$\Rightarrow$ Řešení: $\underline{\underline{x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)}}$

□

Příklad 2.42. Řešte nerovnici:

$$\frac{2\,(3x-1)}{x+4} \leq 0.$$

Řešení. Čitatel je roven nule pro $x = \frac{1}{3}$, jmenovatel pro $x = -4$. V těchto hodnotách se mění znaménko zlomku, přičemž pro $x = \frac{1}{3}$ je zlomek roven nule, pro $x = -4$ není definován. Reálnou osu rozdělíme na tři intervaly a v nich vyšetříme znaménko. Koeficient 2 v čitateli nemá na řešení nerovnice vliv.



$\Rightarrow$ Řešení: $\underline{\underline{x \in \left(-4, \frac{1}{3}\right\rangle}}$

□

Příklad 2.43. Řešte nerovnici:

$$\frac{2-x}{x+5} \geq 1.$$

Řešení. Budeme-li postupovat tak, že nerovnici vynásobíme jmenovatelem levé strany, musíme rozlišit dva případy:

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} x+5>0 \Leftrightarrow x>-5 \\ 2-x \geq x+5 \;\Leftrightarrow\; 2x \leq -3 \;\Leftrightarrow\; x \leq -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x \in \left(-5, -\tfrac{3}{2}\right\rangle$$

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} x<-5 \\ 2-x \leq x+5 \;\Leftrightarrow\; 2x \geq -3 \;\Leftrightarrow\; x \geq -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \quad \text{nelze}$$

Řešení je $\underline{\underline{x \in \left(-5, -\tfrac{3}{2}\right\rangle}}$.

Lze zvolit i jiný postup (použitelný i ve složitějších případech):

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{x+5} &\geq 1 \\ \frac{2-x}{x+5} - 1 &\geq 0, \quad x \neq -5 \\ \frac{2-x-x-5}{x+5} &\geq 0 \\ \frac{-(3+2x)}{x+5} &\geq 0 \end{aligned}$$

		-5		$-\frac{3}{2}$	
$2-x$	+		+		−
$x+5$	−		+		+
zlomek	−		+		−

$\Rightarrow$ Řešení: $\underline{\underline{x \in \left(-5, -\tfrac{3}{2}\right\rangle}}$

□

Příklad 2.44. Řešte nerovnici:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+1} \leq 1.$$

Řešení. Kdybychom násobili společným jmenovatelem, museli bychom vyšetřovat jeho znaménko, tj. řešit další nerovnost. Raději všechny výrazy převedeme na jednu stranu nerovnice a poté na společného jmenovatele.

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+1} \leq 1$$

$$\frac{x}{x-2}-\frac{3}{x+1}-1\le 0,\quad x\ne -1,\ x\ne 2$$
$$\frac{x(x+1)-3(x-2)-(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)}\le 0$$

Čitatele roznásobíme a sečteme. **Jmenovatele neroznásobujeme** – pro určení jeho znaménka ho potřebujeme mít ve tvaru součinu!

$$\frac{\cancel{x^2}+x-3x+6-(\cancel{x^2}-2x+x-2)}{(x-2)(x+1)}\le 0$$
$$\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}\le 0$$
$$\frac{-(x-8)}{(x-2)(x+1)}\le 0$$

$$\text{znaménko}\quad \begin{array}{cccc} & -1 & 2 & 8 \\ \hline + & - & + & - \end{array}\quad \Rightarrow\quad \text{Řešení: } \underline{\underline{x\in(-1,2)\cup\langle 8,\infty)}}$$

$\square$

Cvičení

Řešte následující nerovnice.

1) $\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+3}{x-1}>1$ $\quad$ $\left[x\in(-\infty,-2)\cup(-\frac{1}{3},1)\right]$

2) $\frac{x+1}{x+3}>\frac{x+5}{x+6}$ $\quad$ $[x\in(-\infty,-9)\cup(-6,-3)]$

3) $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{x^2-1}<0$ $\quad$ $[x\in(-2,-1)\cup(1,3)]$

4) $\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}>1$ $\quad$ $[x\in(-3,1)\cup(1,\infty)]$

2.3.3 Nerovnice s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota reálného čísla $|x|$ je vzdálenost bodu x od počátku:

$$|x|=\begin{cases} x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{|x|=\sqrt{x^2}}}$$

$|x|=a \quad\Leftrightarrow\quad x=a\ \vee\ x=-a \quad (a\ge 0!)$ $\quad$ můžeme napsat $x=\pm a$

$|x|<a \quad\Leftrightarrow\quad -a<x<a$ $\quad$ **nemůžeme napsat $x<\pm a$!**

$$|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x < -a \vee x > a$$

Analogicky

$$|x - x_0| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x - x_0 < a \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - a < x < x_0 + a,$$

tedy $|x - x_0|$ je vzdálenost bodu x od bodu x_0.

Příklad 2.45. Řešte nerovnici:

$$|x - 4| \leq 10.$$

Řešení.

$$|x - 4| \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad -10 \leq x - 4 \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad -6 \leq x \leq 14$$

Řešení je $\underline{\underline{x \in \langle -6, 14 \rangle}}$.

□

Příklad 2.46. Řešte nerovnici:

$$\left| \frac{x-3}{2} - 1 \right| > 1.$$

Řešení.

$$\left| \frac{x-3}{2} - 1 \right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{2} - 1 < -1 \ \vee \ \frac{x-3}{2} - 1 > 1$$

Tedy

1) $\frac{x-3}{2} - 1 < -1 \ \Leftrightarrow \ \frac{x-3}{2} < 0 \ \Leftrightarrow \ x - 3 < 0 \ \Leftrightarrow \ x < 3,$

2) $\frac{x-3}{2} - 1 > 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{x-3}{2} > 2 \ \Leftrightarrow \ x - 3 > 4 \ \Leftrightarrow \ x > 7.$

Řešení je $\underline{\underline{x \in (-\infty, 3) \cup (7, \infty)}}$.

□

Příklad 2.47. Řešte nerovnici:

$$|x + 3| > |x - 2| .$$

Řešení. Reálnou osu rozdělíme na tři intervaly, ve kterých výrazy v absolutních hodnotách nemění znaménko:

1) $x < -3: \quad |x + 3| = -x - 3, \quad |x - 2| = 2 - x$

$$|x + 3| > |x - 2| \ \Leftrightarrow \ -x - 3 > 2 - x \ \Leftrightarrow \ -3 > 2 \quad \text{spor}$$

2) $-3 \leq x < 2: \quad |x + 3| = x + 3, \quad |x - 2| = 2 - x$

$$|x + 3| > |x - 2| \ \Leftrightarrow \ x + 3 > 2 - x \ \Leftrightarrow \ 2x > -1 \ \Leftrightarrow \ x > -\tfrac{1}{2}$$

3) $x \geq 2:\quad |x+3| = x+3,\quad |x-2| = x-2$
$$|x+3| > |x-2| \;\Leftrightarrow\; x+3 > x-2 \;\Leftrightarrow\; 3 > -2 \quad \text{platí}$$

Celkově dostáváme
$$\left((-3 \leq x < 2) \wedge \left(x > -\frac{1}{2}\right)\right) \vee (x \geq 2) \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{1}{2},$$
tedy řešení je $\underline{\underline{x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)}}$.

□

Příklad 2.48. Řešte nerovnici:
$$||x-2| - |x|| \leq 2x.$$

Řešení. Mohou nastat tři situace:

1) $x < 0:\quad |x-2| = 2-x,\quad |x| = -x,\quad ||x-2|-|x|| = |2-x+x| = |2| = 2$
$$||x-2|-|x|| \leq 2x \;\Leftrightarrow\; 2 \leq 2x \;\Leftrightarrow\; x \geq 1 \quad \text{spor}$$

2) $0 \leq x < 2:\quad |x-2| = 2-x,\quad |x| = x$
$$||x-2|-|x|| = |2-2x| = 2\,|1-x| = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x < 1 \\ 2(x-1) & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

a) $0 \leq x < 1:\quad ||x-2|-|x|| \leq 2x \;\Leftrightarrow\; 2(1-x) \leq 2x \;\Leftrightarrow\; 1-x \leq x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 2x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{1}{2}$

b) $1 \leq x < 2:\quad ||x-2|-|x|| \leq 2x \;\Leftrightarrow\; 2(x-1) \leq 2x \;\Leftrightarrow\; x-1 \leq x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; -1 \leq 0 \quad \text{platí}$

3) $x \geq 2:\quad |x-2| = x-2,\quad |x| = x,\quad ||x-2|-|x|| = |x-2-x| = 2$
$$||x-2|-|x|| \leq 2x \;\Leftrightarrow\; 2 \leq 2x \;\Leftrightarrow\; x \geq 1 \;(\wedge\, x \geq 2) \quad \text{platí}$$

Řešení je $\underline{\underline{x \in \left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)}}$.

□

Cvičení

Řešte následující nerovnice.

1) $\left|\frac{x}{2} + 7\right| < 7$ $\qquad [x \in (-24, 0)]$

2) $3\,|x-1| + |3x-1| \leq x-1$ $\qquad [x \in \emptyset]$

3) $||x-1|-|x+1|| \leq 2x$ $[x \geq 0]$

4) $||x|-|x-2|| \leq 2x$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

2.3.4 Iracionální nerovnice

Při řešení nerovnic s odmocninami je vhodné nejdříve vyšetřit definiční obory výrazů, které v nich vystupují.

Příklad 2.49. Řešte nerovnici:

$$\sqrt{x} < x.$$

Řešení. Definiční obor odmocniny je $x \geq 0$. Obě strany nerovnice jsou nezáporné, tedy můžeme umocnit:

$$\sqrt{x} < x \;\Leftrightarrow\; x < x^2 \wedge x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x > 0 \wedge x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-1) > 0 \wedge x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1$$

Řešení je $\underline{\underline{x \in (1, \infty)}}$.

$\square$

Příklad 2.50. Řešte nerovnici:

$$\sqrt{x+3} < 9.$$

Řešení. Definiční obor odmocniny je $x \geq -3$.

$$\sqrt{x+3} < 9 \;\Leftrightarrow\; x+3 < 81 \wedge x \geq -3 \;\Leftrightarrow\; x < 78 \wedge x \geq -3$$

Řešení je $\underline{\underline{x \in \langle -3, 78)}}$.

$\square$

Příklad 2.51. Řešte nerovnici:

$$\sqrt{x^2+4} \leq x+2.$$

Řešení. Definiční obor odmocniny je $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+4} \leq x+2 \;\Leftrightarrow\; x^2+4 \leq x^2+4x+4 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 4x \;\Leftrightarrow\; x \geq 0$$

Řešení je $\underline{\underline{x \in \langle 0, \infty)}}$.

$\square$

Příklad 2.52. Řešte nerovnici:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 2.$$

Řešení. Definiční obor je $x \geq 0 \wedge x \neq 1$.

1) $x > 1$ $(\Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0)$: $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x}+1 > 2\sqrt{x}-2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} < 3 \;\Leftrightarrow\; x < 9$

2) $0 \leq x < 1$ $(\Rightarrow \sqrt{x}-1 < 0)$: $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x}+1 < 2\sqrt{x}-2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} > 3 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x > 9$ spor

Řešení je $\underline{\underline{x \in (1, 9)}}$.

$\square$

Cvičení

Řešte následující nerovnice.

1) $\sqrt{2x-8} < \sqrt{x+2}$ $[x \in \langle 4, 10)]$

2) $\sqrt{x^2+x-6} \leq 4-x$ $\left[x \in \left\langle 2, \frac{22}{9} \right\rangle\right]$

3) $\frac{x-2\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2} < 0$ $[x \in (1, 9)]$

4) $(x+1)^{\frac{2}{3}}(2x-1)^{-\frac{2}{3}} + (2x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{1}{3}} \geq 0$ $\left[x \in (-\infty, -1) \cup \left\langle 0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right]$

2.4 Funkce

Funkce jsou základním předmětem studia v matematické analýze. Zkoumáme jejich chování, rychlost změny (tedy derivaci), vyšetřujeme jejich největší a nejmenší hodnoty, obsahy ploch pod jejich grafy a podobně. Toto všechno ovšem provádíme proto, že pomocí funkční závislosti můžeme popsat průběh různých dějů, které potřebujeme vyšetřovat – tedy především musíme umět takovou funkční závislost ve zkoumaném problému vidět a pomocí funkce jej formulovat. Všimneme si tedy nejdříve několika takových jednoduchých situací:

2.4.1 Funkční předpis

Příklad 2.53. Určete závislost povrchu krychle na délce jeho strany.

Řešení. Délka strany krychle je proměnná veličina, tedy nezávisle proměnná x. Hledaný povrch je zřejmě

$$\underline{\underline{S = f(x) = 6x^2}},$$

kde $D_f = (0, \infty)$ (délka strany je kladné číslo).

□

Příklad 2.54. Určete závislost objemu kvádru se čtvercovou podstavou a povrchem rovným 2 na délce strany podstavy.

Řešení. Délku strany podstavy označíme x. Pro objem platí

$$V = f(x) = x^2 \cdot v.$$

Výšku určíme pomocí zadaného povrchu

$$2 = S = 2x^2 + 4xv \quad \Rightarrow \quad 2xv = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \underline{v = \frac{1-x^2}{2x}}.$$

Odtud dostaneme

$$V(x) = f(x) = x^2 \cdot \frac{1-x^2}{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,x\,(1-x^2)}},$$

kde $D_f = (0, 1)$ (objem musí být kladný).

□

Příklad 2.55. Vyjádřete závislost počtu aritmetických operací (sečítání a násobení) potřebných k výpočtu funkční hodnoty polynomu při dosazení daného čísla na stupni tohoto polynomu.

Řešení.

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n$$

a_1x_0 jeden součin

$\vdots$

$$a_nx_0^n = a_n \cdot \underbrace{x_0 \cdot x_0 \cdot \ldots \cdot x_0}_{n\times} \quad \Rightarrow \quad 1 + (n-1) = n \text{ součinů}$$

celkem $1 + 2 + \cdots + n$ součinů

$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n$ n součtů

Celkem tedy

$$f(n) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n = \frac{1}{2}n(n+1) + n = \underline{\underline{\frac{1}{2}n(n+3)}} \quad \text{aritmetických operací}$$

□

Cvičení

V tomto cvičení nejsou uvedeny výsledky – ty by byly návodem k výpočtům a úlohy by ztratily původní smysl.

1) Mezi Fahrenheitovou (F) a Celsiovou (C) stupnicí na měření teploty je lineární vztah, takže teplotu ve stupních F lze vypočítat z teploty určené ve stupních C pomocí lineární rovnice.

   a) Najděte tento vztah, jestliže teplotě 0 °C odpovídá 32 °F a teplotě 100 °C odpovídá 212 °F.

   b) Kolika stupňům F odpovídá 30 °C?

   c) Naměřeno bylo 100 °F. Kolik je to ve stupních C?

   d) Najděte vztah pro výpočet teploty ve stupních C, jestliže znáte teplotu ve stupních F.

e) Na pozorovací stanici v Antarktidě teplota v průběhu 24 hodin kolísala mezi −49 °C a 14 °F. Určete toto rozmezí kolísání ve stupních C.

2) Tlak p pod vodou podle zkušeností potápěčů závisí na hloubce v metrech, ve které je potápěč, lineárně podle závislosti $p = kd + 1$, kde k je nějaká konstanta. Na hladině ($d = 0$ m) je tlak 1 atm, tlak v hloubce 100 m je přibližně 10,94 atm. Určete tlak v hloubce 50 m pod hladinou.

3) Vodní nádrž se v říjnu a listopadu vypouští. V průběhu celého října při rovnoměrném ubývání vody bylo 11. října v nádrži 200 milionů litrů vody, 20. října 164 milionů litrů. Vypočítejte

   a) kolik vody bylo v nádrži 7. října,

   b) kolik vody bylo v nádrži 17. října.

   V průběhu celého listopadu voda ubývala rovnoměrně mírou 2 miliony litrů za den. Znázorněte množství vody v nádrži od začátku října a vypočítejte

   a) kolik vody bylo v nádrži 17. listopadu,

   b) kolik vody bylo v nádrži 30. listopadu.

4) Výrobek se prodává za cenu 100 Kč za kus. Výrobní náklady se skládají z pevné složky 800 Kč a z nákladů na materiál 60 Kč za kus.

   a) Najděte funkci $R(x)$ popisující příjem z prodeje v závislosti na počtu kusů x.

   b) Najděte funkci $C(x)$ popisující výrobní náklady v závislosti na počtu kusů x.

   c) Kolik výrobků je třeba prodat, aby příjem vyrovnal náklady?

   d) Najděte funkci $P(x)$, která popisuje zisk z prodeje v závislosti na počtu kusů x.

   e) Jaký je zisk při prodeji 10, 20, 30 kusů výrobku?

5) Členství v soukromém tenisovém klubu stojí 3 000 Kč ročně a poplatek za každou hodinu hry je 50 Kč. Ve druhém tenisovém klubu je roční poplatek 1 500 korun a za hodinu hry se platí 60Kč. Jestliže uvažuje tenisový hráč jen o finanční výhodnosti, podle čeho se rozhodne při výběru jednoho z klubů? Proveďte analýzu úlohy a znázorněte graficky.

6) Půjčovna automobilů účtuje základní poplatek 420 Kč a pak 4,50 Kč za každý kilometr jízdy. Jiná agentura má základní poplatek 540 Kč a za kilometr jízdy požaduje 3,50 Kč. Kterou agenturu si zákazník vybere?

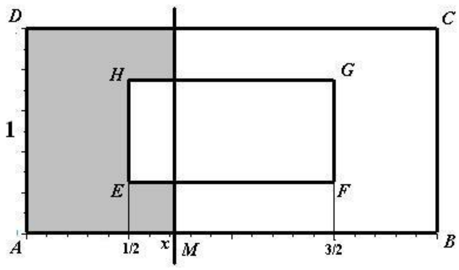
7) Předpokládejme, že automobil má spotřebu 6,4 l benzínu na 100 km.

   a) Jaká je spotřeba na 250 km? Na x km?

   b) Kolik km ujede auto na 1 litr, resp. na x litrů benzínu?

8) Auto má spotřebu 5,5 l/100 km; jiné auto najede na 1 l benzínu téhož druhu 18 km. Jestliže vezmeme v úvahu pouze spotřebu benzínu, jízda kterým autem je dražší? Znázorněte grafy spotřeby pro obě auta.

9) Z obdélníku $ABCD$ se stranami $AB = 2$, $BC = 1$ je vynechaný obdélník $EFGH$ se stranami $EF = 1$, $FG = 0,5$ (viz Obr. 2.1). Přímka rovnoběžná se stranou BC protíná stranu AB v bodě M. Vyjádřete obsah šedé části jako funkci délky úsečky AM, $\rho(AM) = x$. Nakreslete graf této funkce.



Obr. 2.1

10) Je dána koule o poloměru r. Vyjádřete

a) objem V rotačního válce vepsaného do této koule jako funkci výšky v,

b) plášť S rotačního kužele vepsaného do této koule jako funkci jeho strany s,

c) objem V rotačního kužele opsaného této kouli jako funkci jeho výšky v.

Najděte definiční obory a obory hodnot těchto funkcí a nakreslete jejich grafy.

11) Daným bodem $A = [a, b]$ v prvním kvadrantu vedeme přímku p tak, aby protla obě kladné poloosy. Její průsečík s osou x označme X, průsečík s osou y označme Y. Vyjádřete obsah trojúhelníku OXY, kde O je počátek souřadnic, jako funkci první souřadnice bodu X a určete její definiční obor.

12) Je dána kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ a na ní bod $A = [a, ?]$. Sestrojíme přímku p rovnoběžnou s tečnou ke kružnici v bodě A. Průsečíky přímky p a dané kružnice označme B a C. Vyjádřete obvod O trojúhelníku ABC jako funkci vzdálenosti x přímky p od počátku souřadné soustavy a určete její definiční obor.

13) Průřez tunelu má tvar obdélníku s přilehlým půlkruhem, přičemž obvod tohoto průřezu je 20 m. Vyjádřete plošný obsah S průřezu tunelu jako funkci poloměru r půlkruhu a určete její definiční obor.

14) Rovinný obrazec je složen z obdélníku o podstavě délky x, na kterém je umístěn rovnostranný trojúhelník se stranou délky x, přičemž obvod obrazce je roven 10. Vyjádřete

a) plošný obsah S obrazce jako funkci délky jeho podstavy a určete definiční obor této funkce,

b) objem tělesa, které vznikne rotací kolem jeho svislé osy symetrie jako funkci délky podstavy obrazce a určete definiční obor této funkce.

15) Úsečku délky 10 rozdělíme na dvě části ve vzdálenosti x od jednoho jejího konce, přičemž

a) z jedné části vyrobíme rovnostranný trojúhelník a z druhé kružnici,

b) z jedné části vyrobíme čtverec a z druhé kružnici,

c) z jedné části vyrobíme rovnostranný trojúhelník a z druhé čtverec.

Vyjádřete součet plošných obsahů takto vzniklých obrazců jako funkci délky x a určete její definiční obor. Pozn.: Uvažujte i možnost, že vůbec nerozdělujeme.

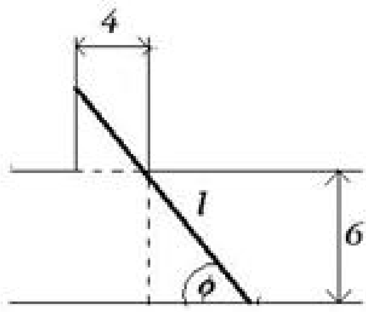
16) Hustým lesem vede přímá cesta. Jižně od cesty se ve vzdálenosti 3 km nachází hájovna. U cesty stojí 5 km od bodu P nejblíže k hájovně hospoda, do které hajný rád chodí. Lesem může jít rychlostí 3 km/h a po cestě rychlostí 5 km/h. Vyjádřete dobu, za kterou se hajný může dostat pěšky z hájovny do hospody, jako funkci vzdálenosti x místa, kde by měl vyjít z lesa na cestu, od bodu na cestě nejblíže hájovně.

17) Město Bory (B) leží 10 km východně od města Akáty (A) a město Cedry (C) leží 3 km jižně od Borů. Z A do C se má postavit dopravní spojení a to tak, že se využije probíhající stavba dálnice z A do B a z ní se vybuduje odbočka obyčejnou silnicí v nějakém místě P na trase AB. Příspěvek na náklady na stavbu dálnice je 4 miliony Kč na 1 km, zatímco cena stavby silnice je 5 milionů Kč na 1 km. Vyjádřete náklady na stavbu silnice jako funkci vzdálenosti x mezi P a B (včetně def. oboru).

18) Muž v loďce (v bodě A) je vzdálený 9,5 km od bodu B na pobřeží. Chce se dostat do místa C na pobřeží, které je od něj vzdálené 16 km. Umí veslovat rychlostí 3,2 km/h a jít rychlostí 6,4 km/h. Vyjádřete čas, za který se dostane do bodu C jako funkci vzdálenosti bodu, ve kterém se vylodí na břehu, od cíle.

19) Dva kanály, kterými se splavují klády, jsou na sebe kolmé a mají šířku 4 m a 6 m. Vyjádřete délku l klády, která se při pohybu z jednoho kanálu do druhého dotýká obou stěn kanálů, jako funkci úhlu ϕ, který svírá s jednou stranou (viz Obr. 2.2).

20) Otevřená krabice vznikla z obdélníkového kartonu 60×28 cm tak, že se v rozích vyřízly čtverce o straně x a vzniklé obdélníky po stranách se ohnuly nahoru. Vyjádřete objem této krabice v závislosti na délce strany vyříznutého čtverce.

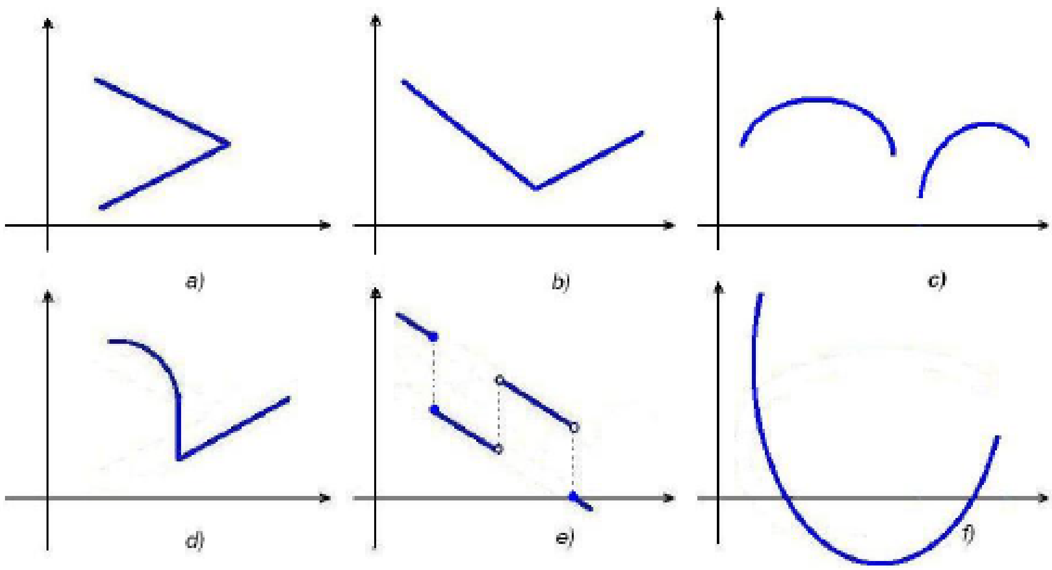


Obr. 2.2

2.4.2 Základní vlastnosti, rovnost funkcí, zúžení funkce

Každá křivka v rovině, jako množina bodů $[x, y]$, která je podmnožinou $\mathbb{R}^2$, je relace z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Taková relace je (ve smyslu definice v IDA) funkcí, jestliže každému x odpovídá nejvýš jedno y – tedy v tom případě, jestliže každá svislá přímka protíná tuto křivku nejvýš v jednom bodě. Pomocí této vlastnosti vyřešíme následující příklad.

Příklad 2.56. V následujícím obrázku (Obr. 2.3) jsou nakresleny křivky. Ve kterém případě se může jednat o graf nějaké funkce a ve kterém ne?



Obr. 2.3

Řešení. Grafy funkcí mohou být pouze křivky v obrázcích b) a c).

□

Velmi důležitý je pojem rovnosti funkcí – zde nám může velmi dobře pomoci pojetí pojmu funkce v IDA: rovnost funkcí jako rovnost příslušných podmnožin $\mathbb{R}^2$, tedy identické grafy funkcí. To znamená, že nestačí zkoumat, zda jsou stejné přiřazovací předpisy, ale musí být stejné i definiční obory (stejné obory hodnot pak vyjdou automaticky).

Příklad 2.57. Zjistěte, které z následujících funkcí f, g (s přirozeným definičním oborem) se sobě rovnají:

a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$,

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$.

Řešení. Postupně dostaneme:

a) $f(x) = x - 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & x \neq -1 \\ \text{nedef.} & x = -1 \end{cases} \;\Rightarrow\; D_f \neq D_g \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f \neq g}},$

b) $$\left.\begin{array}{ll} D_f: \; \frac{x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x < -1 \;\vee\; x \geq 0; & D_f = (-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty) \\ D_g: \; x \geq 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x \geq 0; & D_g = \langle 0, \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$
$\Rightarrow \underline{\underline{f \neq g}}.$

□

Příklad 2.58. Najděte zúžení funkcí z předchozího příkladu tak, aby se takto vzniklé funkce sobě rovnaly.

Řešení. Postupně dostaneme:

a) $f\,|_M = g\,|_M$ platí pro $M = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$,

b) $f\,|_M = g\,|_M$ platí pro $M = \langle 0, \infty)$.

□

Cvičení

1) Najděte alespoň jednu funkci s definičním oborem D a oborem hodnot H tak, aby platilo:

   a) $D = \mathbb{R}$ a $H = \{3, 5\}$, $\left[f(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 5 & x \geq 0 \end{cases}, \; f(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{Q} \\ 5 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \dots \right]$

   b) $D = \mathbb{N}$ a H je množina všech kladných celých čísel, $[f(x) = 2n - 1, \; n \in \mathbb{N}]$

   c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 3\}$ a H je libovolný. $\left[f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}, \quad H_f = \mathbb{R}\right]$

2) Zjistěte, které z následujících funkcí f, g, resp. h (s přirozeným definičním oborem) se sobě rovnají:

   a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2}$ $[f = g]$

   b) $f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2 \ln x$ $[f \neq g]$

   c) $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2}, \quad h(x) = (\sqrt{x})^2$ $[f \neq g, \quad f \neq h, \quad g \neq h]$

3) Najděte zúžení funkcí z předchozího cvičení tak, aby se takto vzniklé funkce sobě rovnaly. [b) $f|_M = g|_M$ pro $M = (0, \infty)$, c) $f|_M = g|_M = h|_M$ pro $M = \langle 0, \infty)$]

4) Nechť funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \frac{1}{x} - 1$. Ověřte, zda platí

   a) $f(x) + f(-x) = -2$ [platí pro $x \neq 0$]

   b) $f(2x) = \frac{1}{2}(f(x) - 1)$ [platí $\forall x \in \mathbb{R}$]

   c) $f(1 - x) = \frac{1}{f(x)}$ [platí pro $x \neq 0$]

   d) $-\frac{1}{f(x+1)} = f(x) + 2$ [platí pro $x \neq -1$]

   e) $\frac{1}{f(x)+1} = f\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ [platí $\forall x \in \mathbb{R}$]

   Mají-li funkce stejný definiční předpis a liší se pouze v definičním oboru, najděte množiny, na kterých se sobě rovnají.

2.4.3 Definiční obor funkce

Při hledání definičních oborů funkcí užijeme metod řešení rovnic a nerovnic – to jsme již procvičili v předchozích kapitolách. Také potřebujeme znát definiční obory základních elementárních funkcí – odmocnin, logaritmů, exponenciálních a logaritmických funkcí – k tomu nám slouží příslušná část v přehledu základních pojmů (kapitola 1).

Příklad 2.59. Určete definiční obor funkce dané předpisem

$$y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{\ln(x^2 - 1)}}.$$

Řešení. Postupně dostaneme:

$D_{\ln}:\quad x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{|x| > 1}} \qquad x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0$

$D_{\sqrt{}}:\quad \frac{1-x^2}{\ln(x^2-1)} \geq 0 \qquad \frac{1-x^2}{\ln(x^2-1)} \geq 0 \land 1 - x^2 < 0 \Rightarrow \ln(x^2 - 1) < 0$

$\ln(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{1 < |x| < \sqrt{2}}}$

$$\underline{\underline{D_f = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})}}$$

$\square$

Příklad 2.60. Určete definiční obor funkce dané předpisem

$$y = \ln\left(2\cos x - \sqrt{3}\right).$$

Řešení. Postupně dostaneme:

$D_{\ln}: \quad 2\cos x - \sqrt{3} > 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Leftrightarrow\; x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \qquad \underline{\underline{\mathrm{D}_f = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi}}$

$\square$

Cvičení

Najděte (přirozené) definiční obory následujících funkcí f, je-li $f(x)$ rovno:

a) $\frac{7x^2+6x+5}{x^2-1}$ $\quad [D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}]$

b) $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ $\quad [D_f = \mathbb{R} - \{-2, -1\}]$

c) $\sqrt{x^2-4}$ $\quad [D_f = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)]$

d) $\sqrt{(3x-2)^2}$ $\quad [D_f = \mathbb{R}]$

e) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ $\quad [D_f = (3, \infty)]$

f) $\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}$ $\quad [D_f = (-5, 5)]$

g) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ $\quad [D_f = (-\infty, -1\rangle \cup (1, \infty)]$

h) $\sqrt{(2-x)(x+3)}$ $\quad [D_f = \langle -3, 2\rangle]$

i) $\frac{x}{|x|}$ $\quad [D_f = \mathbb{R} - \{0\}]$

j) $\frac{x}{x-|x|}$ $\quad [D_f = (-\infty, 0)]$

k) $\frac{2}{x+|x|-2}$ $\quad [D_f = \mathbb{R} - \{1\}]$

l) $\sqrt{\frac{4-x^2}{|4-x^2|}}$ $\quad [D_f = (-2, 2)]$

m) $\sqrt{\frac{x^2-4}{|4-x^2|}}$ $\quad [D_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)]$

n) $(x^2+x-6)^{\sqrt{2}}$ $\quad [D_f = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)]$

o) $\frac{1}{2^{\frac{x}{x-1}} - 3^{\frac{x}{x-1}}}$ $\quad [D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}]$

p) $\ln\left(\sqrt{x-3}-2\right)$ $\qquad [D_f = (7, \infty)]$

r) $\ln\left(e^x - e^{-x}\right)$ $\qquad [D_f = (0, \infty)]$

s) $\ln\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}\right)$ $\qquad [D_f = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)]$

t) $\mathrm{tg}\left(\sqrt{2x}\right)$ $\qquad \left[D_f = -\left\{\frac{1}{2}\cdot\pi^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right\}, k \in \mathbb{Z}\right]$

u) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{9-x^2}$ $\qquad [D_f = \langle 0, 3\rangle]$

v) $\ln\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)$ $\qquad \left[D_f = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

x) $\sin\left[\ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right]$ $\qquad \left[D_f = \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)\right]$

y) $\sqrt{\frac{x}{\sin x}}$ $\qquad [D_f = ((0,\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \cup ((-\pi, 0) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \leq 0)]$

z) $\sqrt{\frac{x}{1+\sin x}}$ $\qquad [D_f = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}]$

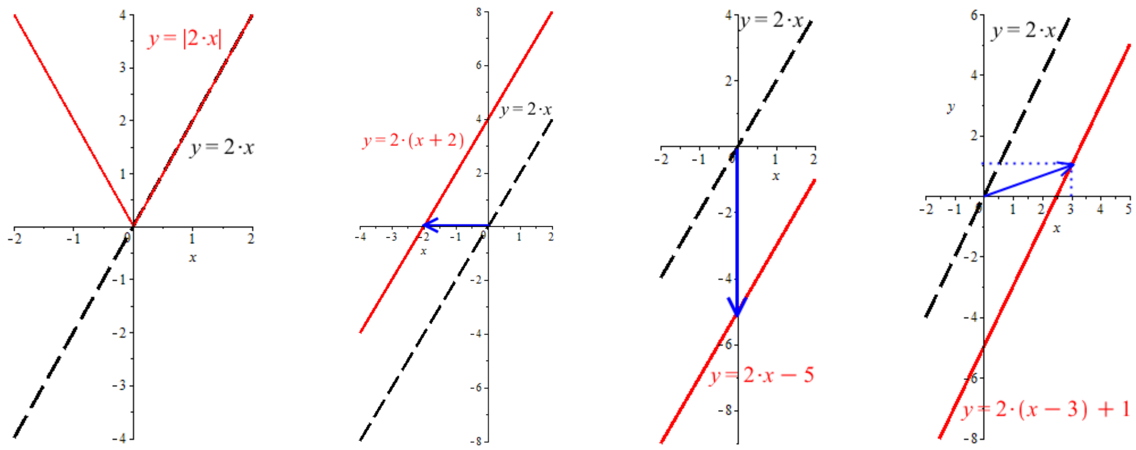
2.4.4 Operace s funkcemi (transformace grafů)

Příklad 2.61. Pomocí grafu funkce $y = 2x$ nakreslete grafy funkcí

a) $f(x) = |2x|$, b) $g(x) = 2(x+2)$, c) $h(x) = 2x - 5$, d) $k(x) = 2(x-3)+1$.

Řešení. Výsledné grafy vzniknou posunutím původního grafu, jak je naznačeno (šipkami) v obrázcích (viz Obr. 2.4).

$\square$



a) b) c) d)

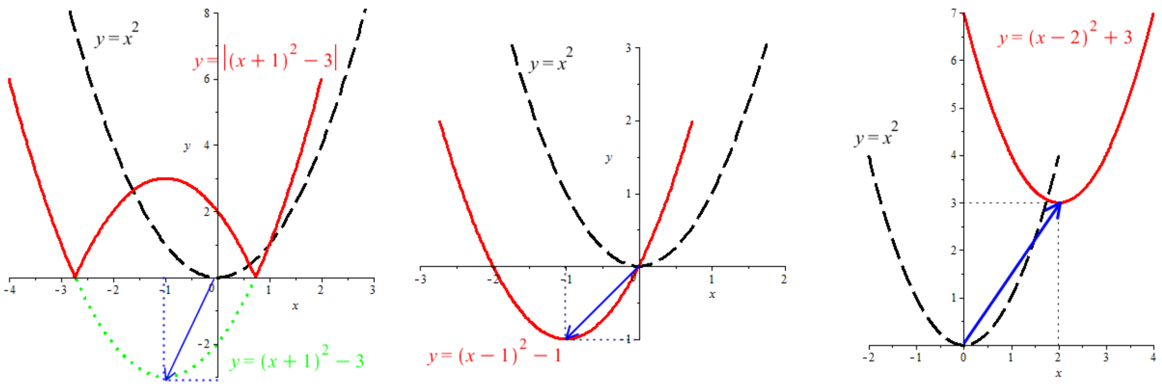
Obr. 2.4

Příklad 2.62. Pomocí grafu funkce $f(x) = x^2$ nakreslete grafy funkcí

$$\text{a) } f(x) = (x-2)^2 + 3, \quad \text{b) } g(x) = x^2 + 2x, \quad \text{c) } h(x) = \left||x+1|^2 - 3\right|.$$

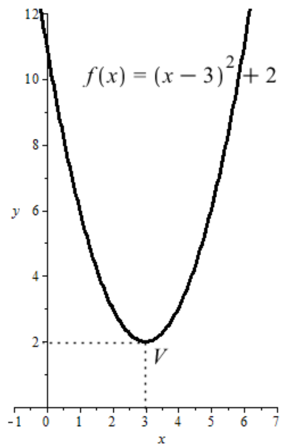
Řešení. Funkce upravíme: $g(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $\quad h(x) = |(x+1)^2 - 3|$
Grafy opět vzniknou posunutím původního grafu. V případě absolutní hodnoty překlopením části grafu, která je pod osou x, do kladných hodnot (viz Obr. 2.5).

□



a) b) c)

Obr. 2.5



Obr. 2.6

Příklad 2.63. Nakreslete graf funkce

$$f(x) = x^2 - 6x + 11.$$

Řešení. Funkci upravíme:

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2,$$

tedy grafem je parabola

$$y - 2 = (x-3)^2, \quad D_f = \mathbb{R},$$

která je otevřená nahoru. Vrchol $V = [3, 2]$, $H_f = \langle 2, \infty)$ $\Rightarrow$ funkce má minimum v bodě $x = 3$, $f(3) = 2$, $f_{\min} = 2$. Jelikož $f(0) = 11$, tak průsečík s osou y je bod $[0, 11]$, osu x graf neprotíná (viz Obr. 2.6).

□

Příklad 2.64. Pomocí grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ nakreslete grafy funkcí

$$\text{a) } g(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad \text{b) } h(x) = -\frac{1}{x-1}, \quad \text{c) } k(x) = \frac{1}{x-1} - 1.$$

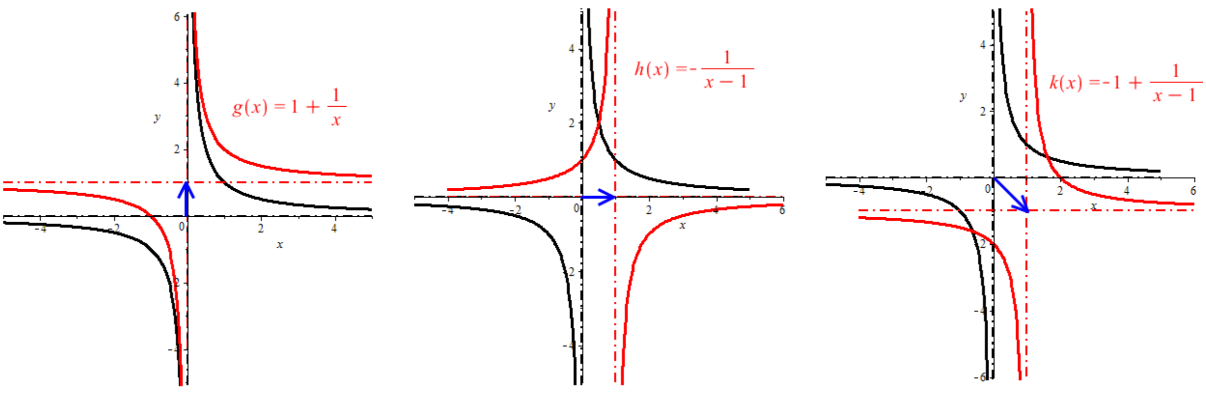
Řešení. Postupně dostaneme:

$g(x):\ y - 1 = \frac{1}{x}$, vrchol posunut do bodu $[0, 1]$,

$h(x):\ y = -\frac{1}{x-1}$, vrchol posunut do bodu $[1, 0]$, graf překlopen podle vodorovné asymptoty,

$k(x):\ y + 1 = \frac{1}{x-1}$, vrchol posunut do bodu $[1, -1]$ (viz Obr. 2.7).

□



a) b) c)

Obr. 2.7

Příklad 2.65. Nakreslete graf funkce

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}.$$

Řešení. Funkci upravíme:

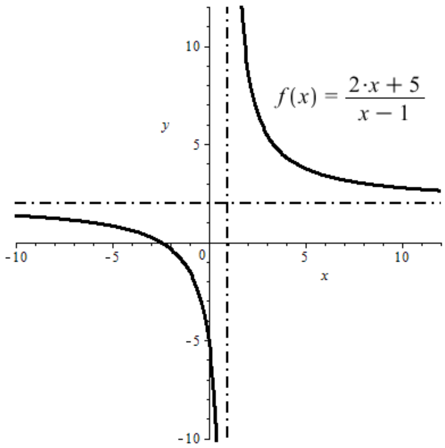
$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1} = \frac{2x-2+7}{x-1} = 2 + \frac{7}{x-1},$$

grafem je tedy hyperbola

$$y - 2 = \frac{7}{x-1},$$

která má vrchol $V = [1,2]$ a asymptoty $x = 1$, $y = 2$. Dále $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $H_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, $f(0) = -5$, $f(x) = 0$ pro $x = -\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ hyperbola prochází body $[0, -5]$ a $\left[-\frac{5}{2}, 0\right]$ (viz Obr. 2.8).

□



Obr. 2.8

Příklad 2.66. Znázorněte graficky řešení rovnic s absolutní hodnotou

a) $|x-3| = 1 - x$, b) $|2x-5| - |4x+7| = 0$, c) $|3 - |2-x|| - 2x = 0$.

Řešení. Řešením rovnic tvaru $f(x) = g(x)$ jsou x-ové souřadnice průsečíků grafů těchto funkcí (viz Obr. 2.9).

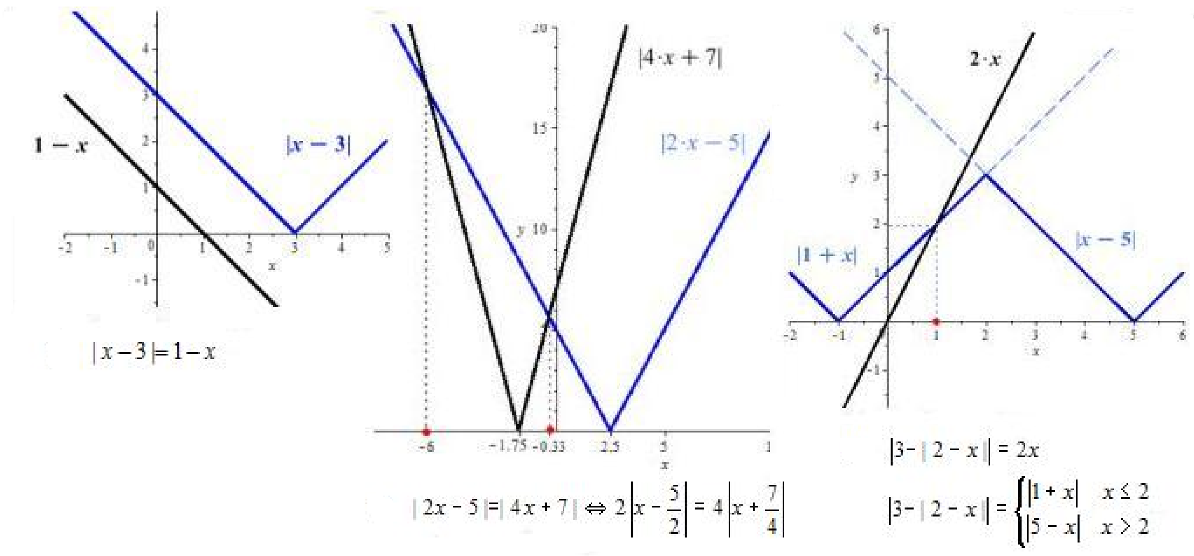
□

Příklad 2.67. Znázorněte graficky řešení nerovnic s absolutní hodnotou

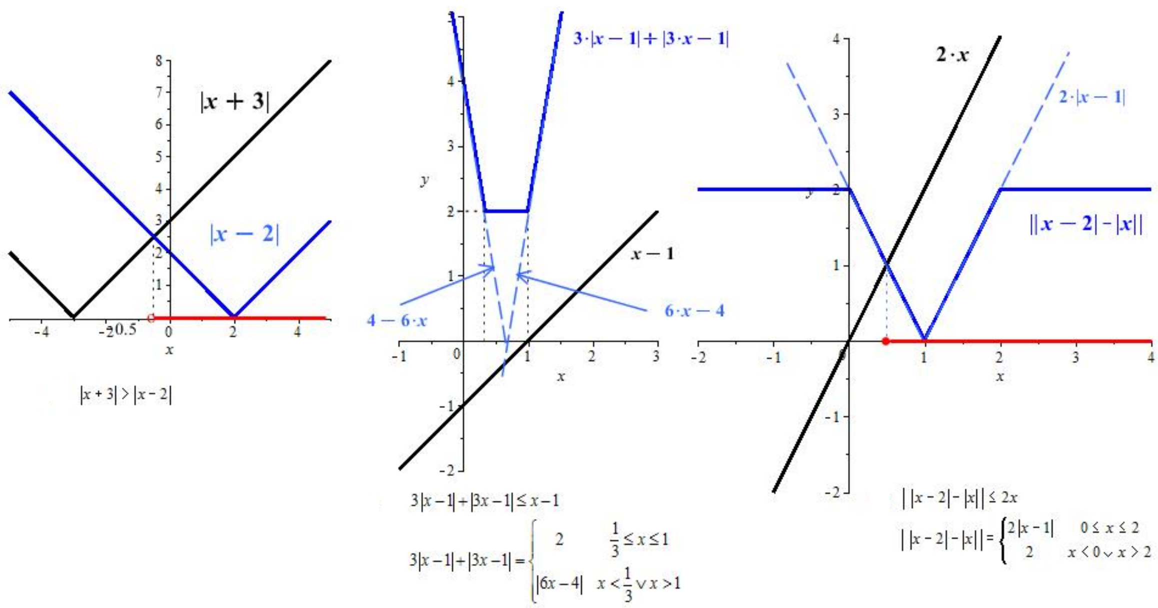
a) $|x+3| > |x-2|$, b) $3|x-1| + |3x-1| \leq x - 1$, c) $||x-2| - |x|| \leq 2x$.

Řešení. Řešením nerovnic tvaru $f(x) < g(x)$ jsou x-ové souřadnice bodů grafu funkce g, které leží nad grafem funkce f (viz Obr. 2.10).

□



Obr. 2.9



Obr. 2.10

Cvičení

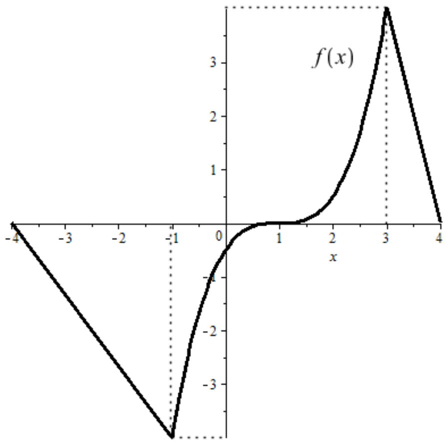
1) Známe-li graf funkce f (viz Obr. 2.11), jak sestrojíme graf funkce g, pro kterou platí ($c,\ a \in \mathbb{R}$):

a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = -f(x)$

c) $g(x) = f(x+c)$ d) $g(x) = f(x) + c$

e) $g(x) = a\,f(x)$ f) $g(x) = f(a\,x)$

g) $g(x) = f(|x|)$ h) $g(x) = |f(x)|$



Obr. 2.11

Nejprve vysvětlete obecně, poté demonstrujte na grafu funkce f v obrázku (řešení viz Obr. 2.12–2.15).

2) Pomocí známých grafů funkcí

a) $y = |x|$, b) $y = x^2$, c) $y = \sin x$, d) $y = \ln x$, e) $y = \mathrm{e}^x$

sestrojte grafy funkcí (řešení viz Obr. 2.16–2.20):

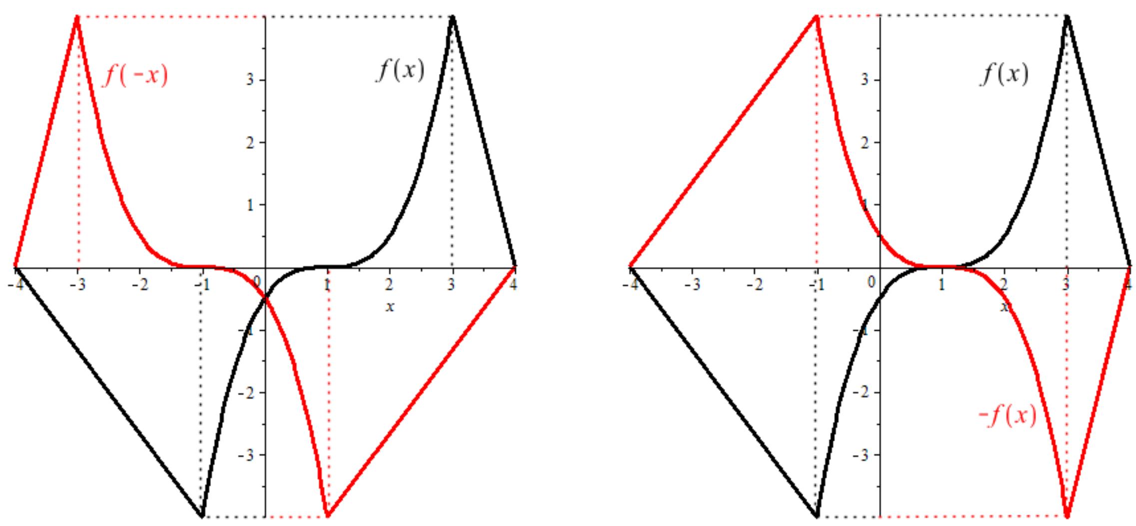
a) $y = -|x|$, $y = 1 + |x|$, $y = |x| - 2$, $y = |x+1|$, $y = |x-2|$,
$y = |x+1| - 2$, $y = 2|x|$

b) $y = 4x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 1$,
$y = (x+2)^2$, $y = (x-1)^2, y = \frac{1}{2}(x-1)^2$, $y = 2(x+2)^2$, $y = x^2 + 4x + 2$,
$y = 4x^2 + 8x + 12$

c) $y = |\sin x|$, $y = -\sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \sin(x+3)$, $y = 2\sin\frac{x}{2}$

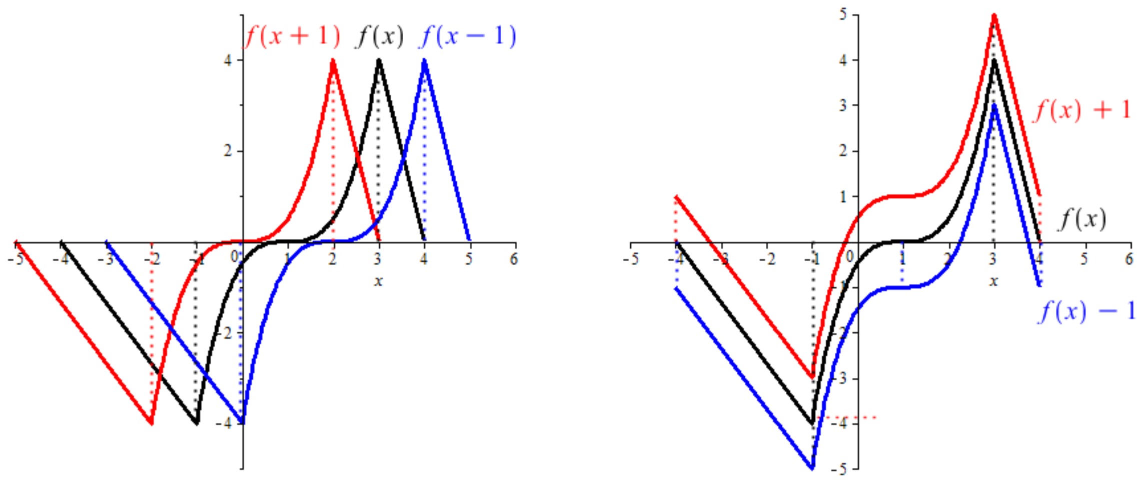
d) $y = \ln(2-x)$, $y = \ln x^2$, $y = 3\ln 2x$, $y = \ln\frac{1}{x}$

e) $y = e^{-x}$, $y = -e^x$, $y = -e^{-x}$, $y = 1 + e^x$, $y = e^{x-1}$, $y = \frac{1}{10}e^{\frac{x}{2}}$



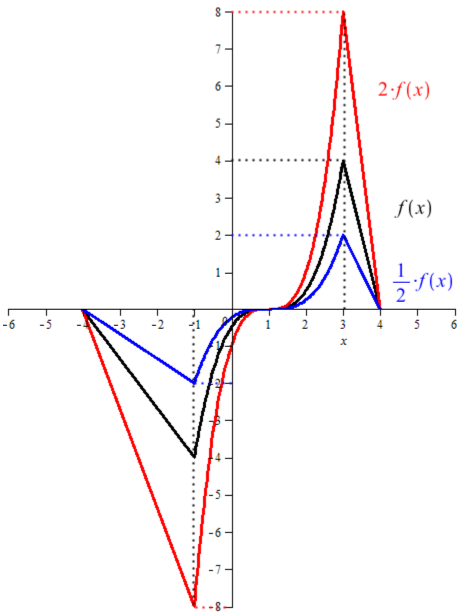
a) b)

Obr. 2.12

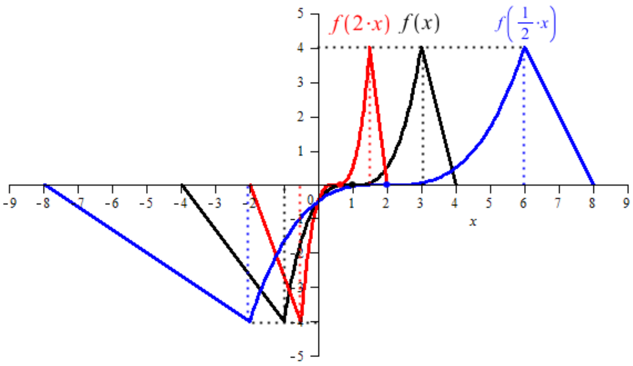


c) d)

Obr. 2.13

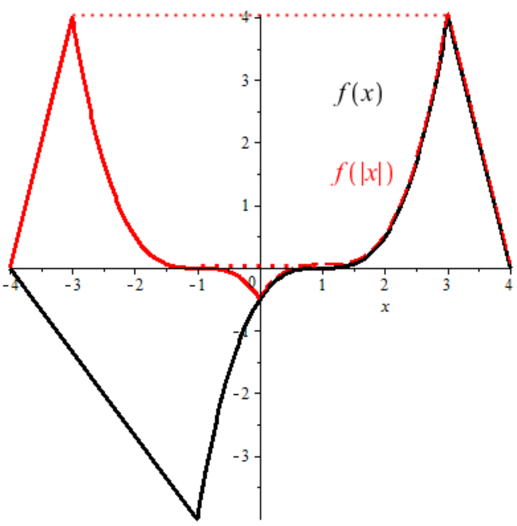


e)

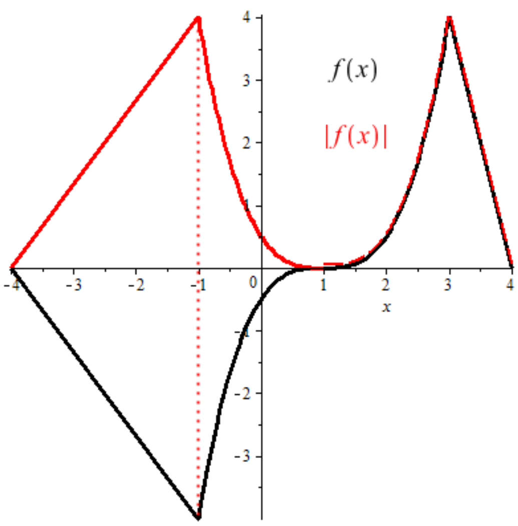


f)

Obr. 2.14

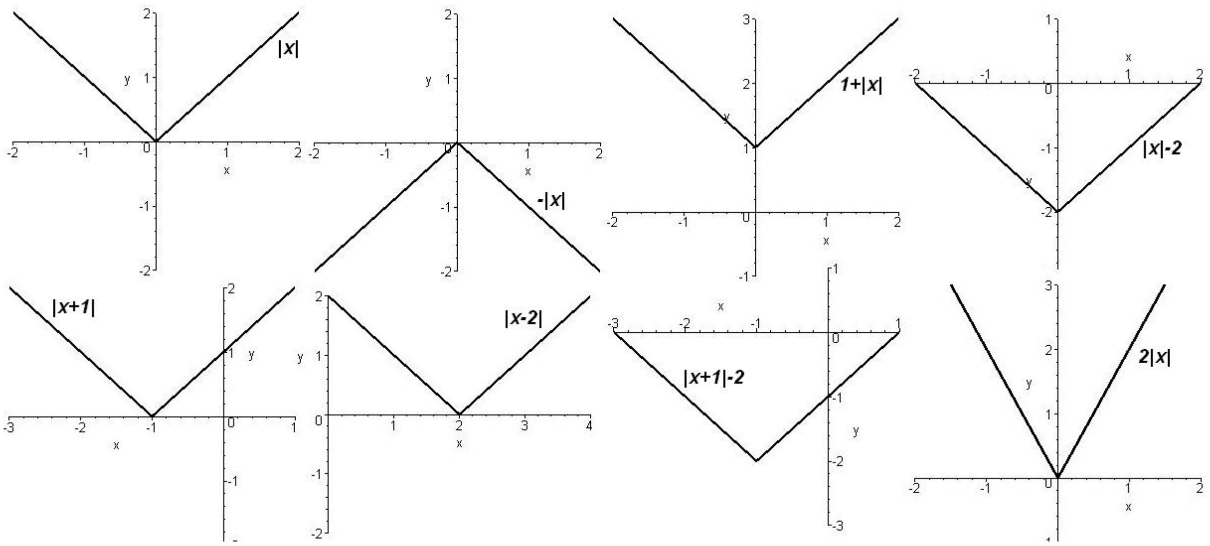


g)

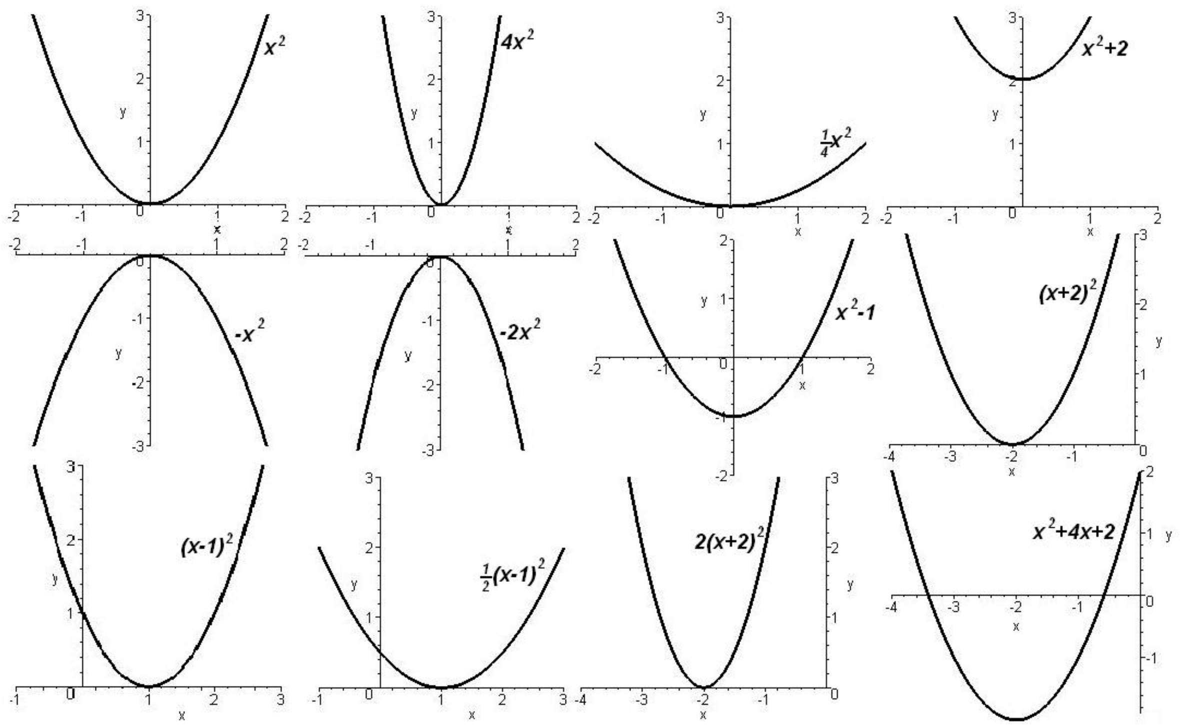


h)

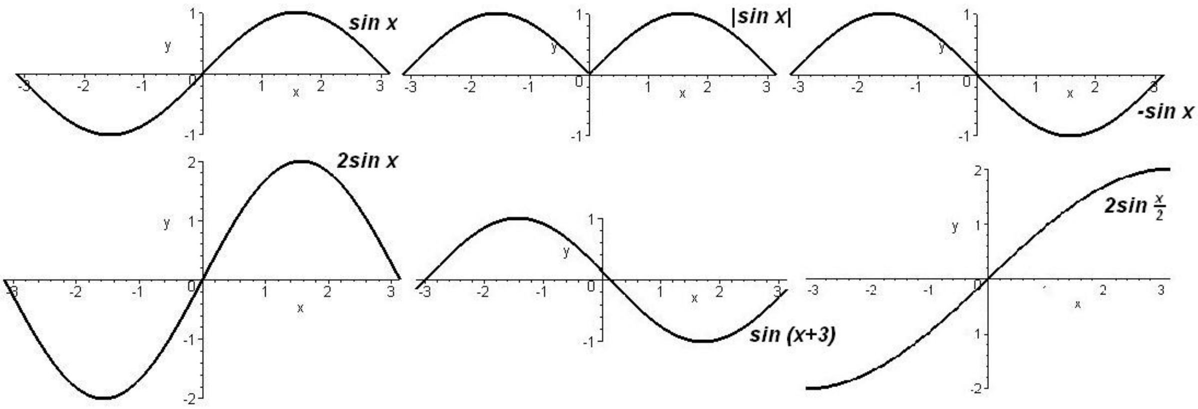
Obr. 2.15



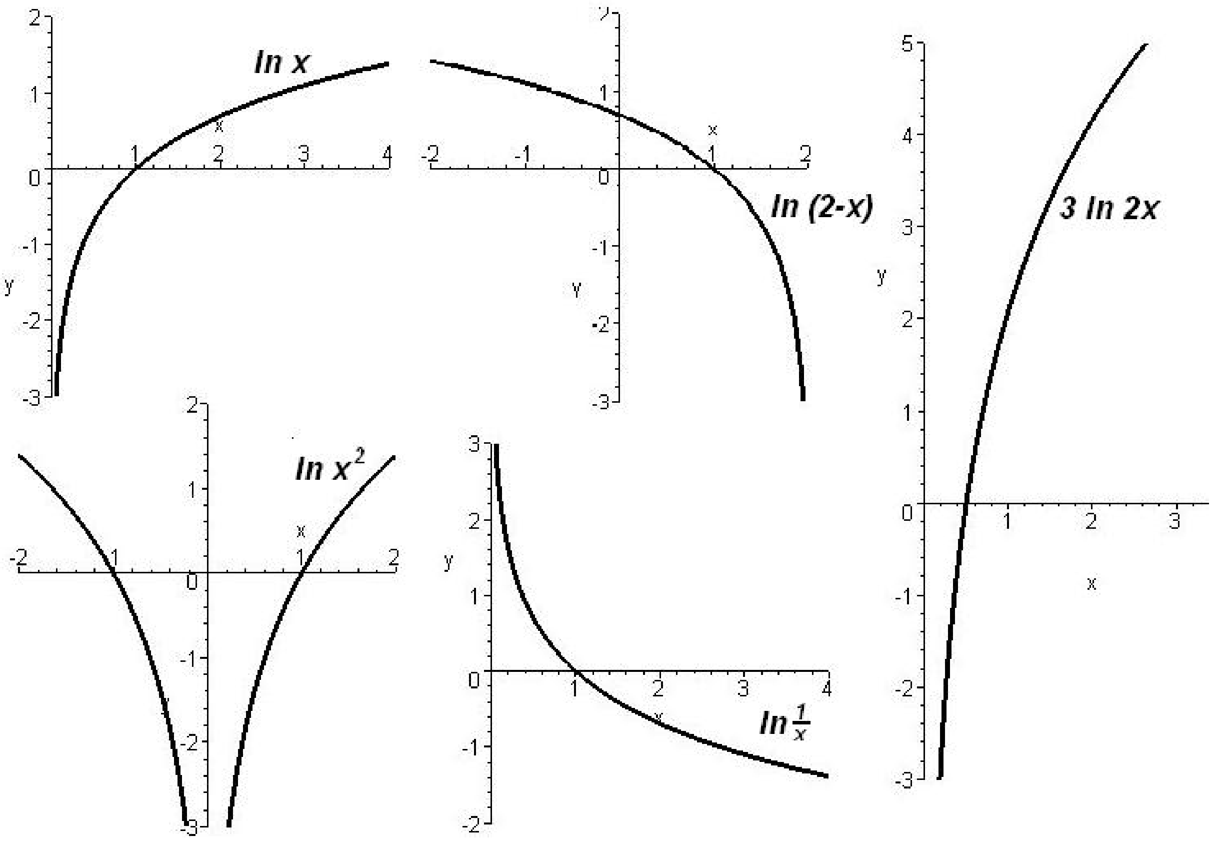
Obr. 2.16



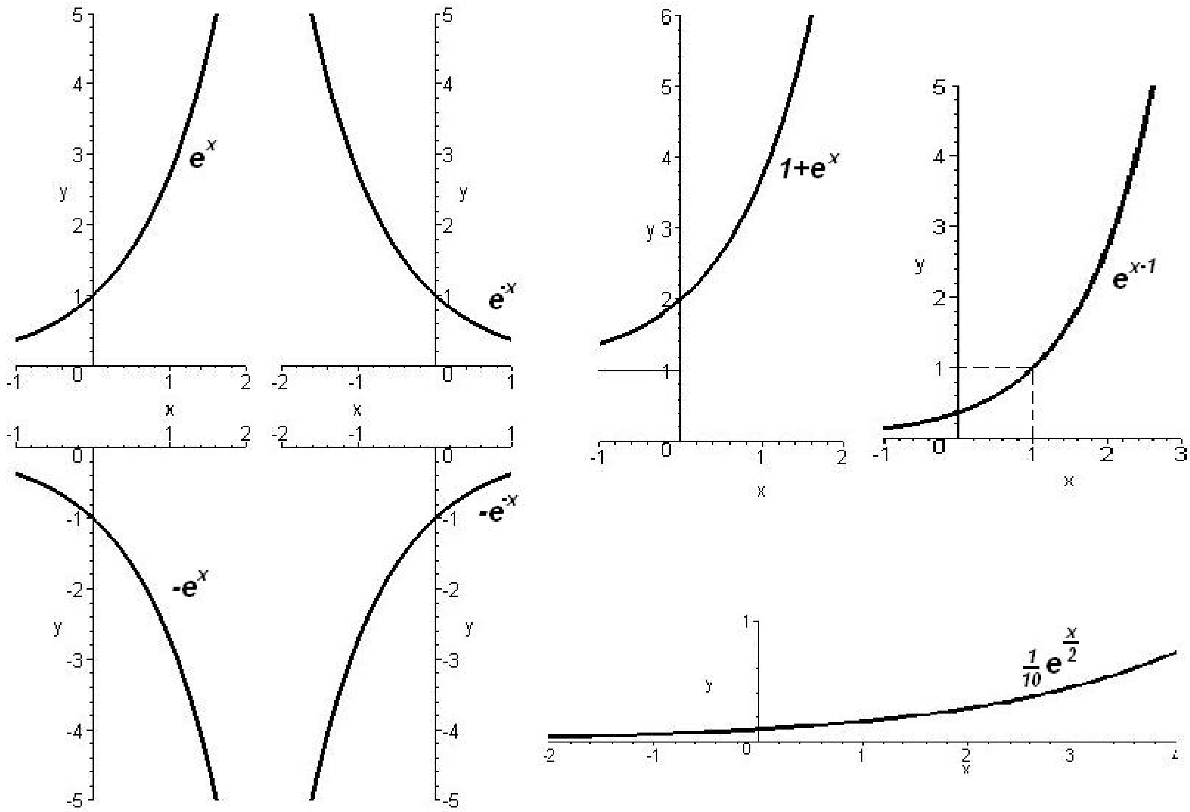
Obr. 2.17



Obr. 2.18



Obr. 2.19



Obr. 2.20

2.4.5 Exponenciální a logaritmické funkce

V tomto odstavci budeme hlavně počítat – musíme si zopakovat, jak jsou tyto funkce definovány a co pro ně platí. Zadané výrazy vždy vhodně upravíme (úprava opět k něčemu směřuje!) a využijeme toho, že exponenciální i logaritmické funkce jsou prosté, tedy

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2, \qquad \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Příklad 2.68. Určete, pro která x platí:

$$\text{a)} \left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{3}{2}, \quad \text{b)} \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\frac{125}{512}\right)^{3-x}, \quad \text{c)}\ 3^{2+x} + 3^{4-x} - 90 = 0.$$

Řešení. Postupně vyřešíme:

a)

$$\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3^3}{2^3}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$$

b)

$$\frac{64}{25} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\frac{125}{512}\right)^{3-x} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\left(\frac{5}{8}\right)^3\right)^{3-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^{2+\frac{3}{x-1}} = \left(\frac{8}{5}\right)^{-3\cdot(3-x)} \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x-1} = 3\,(x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x-11)(x-1) = 3 \ (\wedge\ x \neq 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{3} = \frac{7 \pm 5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3} \quad \vee \quad x = 4}}$$

c)

$$3^{2+x} + 3^{4-x} - 90 = 0 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^x + 3^4 \cdot 3^{-x} - 90 = 0 \Leftrightarrow |t := 3^x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9t + 81 \cdot \frac{1}{t} - 90 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \ (\wedge\ t \neq 0) \Leftrightarrow (t-1)(t-9) = 0$$

$$t = 1: \quad 3^x = 1 \Rightarrow x = 0, \qquad t = 9: \quad 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0 \quad \vee \quad x = 2}}$$

□

Příklad 2.69. Určete, pro která x platí:

$$\text{a)}\ -1 \leq \log_3 x \leq 2, \quad \text{b)}\ \log_2(2x-3) < 3.$$

Řešení. Využijeme definici logaritmu (je inverzní k exponenciální funkci) a definičního oboru logaritmické funkce:

a)

$$-1 \leq \log_3 x \leq 2 \;\Leftrightarrow\; \left(3^{-1} \leq x \leq 3^2 \;\wedge\; x > 0\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3} \leq x \leq 9 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x \in \left\langle \frac{1}{3}, 9 \right\rangle}}$$

b)

$$\log_2(2x-3) < 3 \;\Leftrightarrow\; \left(2x-3 < 2^3 = 8 \;\wedge\; 2x-3 > 0\right) \;\Leftrightarrow\; (2x < 5 \;\wedge\; 2x > 3) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}}$$

□

Příklad 2.70. Řešte rovnice:

a) $2\ln(x-2) = \ln(14-x)$, b) $\log(x+1) + \log(x-1) = \log x + \log(x+2)$.

Řešení. Nejdříve vždy najdeme definiční obory jednotlivých výrazů, potom upravíme pomocí pravidel pro počítání s logaritmy:

a) $x - 2 > 0 \;\wedge\; 14 - x > 0 \;\Rightarrow\; \underline{x \in (2, 14)}$;

$$2\ln(x-2) = \ln(14-x) \;\Leftrightarrow\; \ln(x-2)^2 = \ln(14-x) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(x \in (2,14) \;\wedge\; x^2 - 4x + 4 = 14 - x\right)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 14 - x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 3x - 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-5)(x+2) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = 5 \vee x = -2; \qquad 5 \in (2,14), \qquad -2 \notin (2,14) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x = 5}}$$

b) $x > -1 \wedge x > 1 \wedge x > 0 \wedge x > -2 \;\Leftrightarrow\; \underline{x > 1}$;

$$\log(x+1) + \log(x-1) = \log x + \log(x+2) \;\Leftrightarrow\; \log\left((x+1)(x-1)\right) = \log\left(x(x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow\; x > 1 \;\wedge\; x^2 - 1 = x^2 + 2x \;\Leftrightarrow\; x > 1 \;\wedge\; -1 = 2x \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2} \;\wedge\; x > 1$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{nemá řešení}}}$

□

Cvičení

1) Zjistěte, pro která x platí:

a) $2^{3x+1} = 4$ $\left[x = \frac{1}{3}\right]$

b) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2}$ $[x = 1]$

c) $5^x + 1 - 3 \cdot 5^x = -49$ $[x = 2]$

d) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16 \cdot \sqrt{2}$ $[x = 7 \ \vee x = -1]$

e) $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ $[x = 0]$

f) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$ $[x = 3]$

2) Řešte logaritmické rovnice:

a) $\log(4x + 6) - \log(2x - 1) = 1$ $[x = 1]$

b) $2\log(x + 5) = \log 2x + 1$ $[x = 5]$

c) $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = \ln 6$ $[x = 3]$

d) $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$ $\left[x = 1000 \ \vee x = \frac{1}{10}\right]$

2.4.6 Goniometrické funkce

Opět budeme hlavně počítat – musíme si zopakovat definiční vztahy, hodnoty funkcí pro základní hodnoty proměnné (pozor: hodnoty jsou reálná čísla, ne stupně! $x^{\mathrm{o}} = x \cdot \frac{\pi}{180}$), vlastnosti (definiční obor, periodičnost) a vztahy, které platí pro násobky hodnot a převodní vztahy mezi jednotlivými funkcemi – najdeme v tabulkách v 1. části tohoto textu.

Příklad 2.71. Určete

$$\text{a) } \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right), \quad \text{b) } \operatorname{cotg}\left(-\frac{49}{6}\pi\right).$$

Řešení. Postupně dostaneme:

a)

$$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

b)

$$\operatorname{cotg}\left(-\frac{49}{6}\pi\right) = \operatorname{cotg}\left(-\frac{48}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \operatorname{cotg}\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

□

Příklad 2.72. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin x \geq 0 \wedge \cos x < 0.$$

Řešení. Postupně dostaneme:

$$\sin x \geq 0 \wedge \cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, \pi \rangle + 2k\pi \wedge x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \underline{\underline{x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}$$

□

Příklad 2.73. Pro $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ platí

$$\sin x = -\frac{\sqrt{63}}{8}.$$

Určete $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Řešení. Pro $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ je $\cos x < 0$ a dále

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{63}{64} = \frac{1}{64},$$

tedy

$$\underline{\underline{\cos x = -\frac{1}{8}}}, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \underline{\underline{\sqrt{63}}}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{63}}}}.$$

□

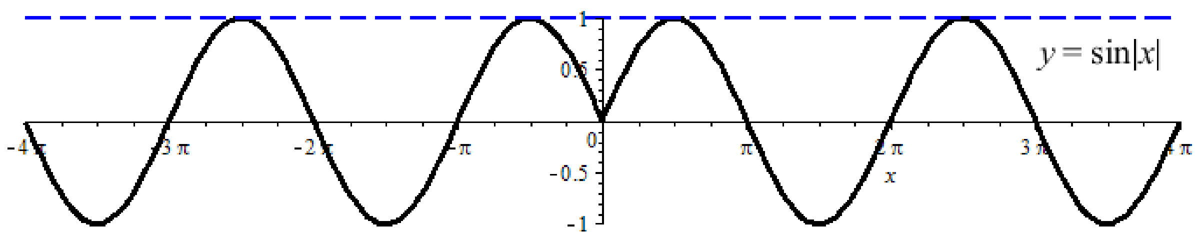
Příklad 2.74. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

a) $\sin|x| = 1$, b) $|\sin x| = 1$.

Řešení. Postupně dostaneme:

a) Viz Obr. 2.21.

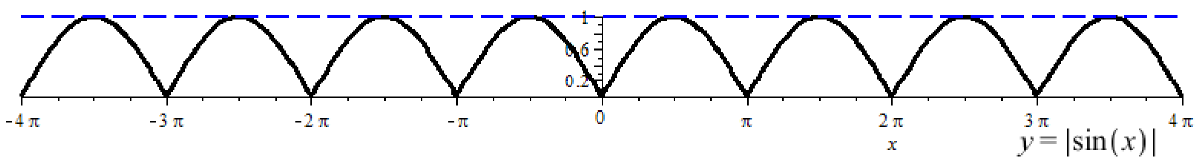
$$\sin|x| = 1 \ \Leftrightarrow\ |x| = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^+}} \ \vee\ \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^-}}$$



Obr. 2.21

b) Viz Obr. 2.22.

$$|\sin x| = 1 \ \Leftrightarrow\ \sin x = \pm 1 \ \Leftrightarrow\ \left(x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3}{2}\pi\right) + 2k\pi \ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}$$



Obr. 2.22

□

Příklad 2.75. Zjednodušte následující výrazy:

$$\text{a)}\ \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}, \qquad \text{b)}\ \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

Řešení. Využijeme vztahy, které platí pro goniometrické funkce; nesmíme zapomenout na body definičního oboru výsledku, které nepadnou do definičního oboru zadané funkce (body, ve kterých není definován výsledek ani zadaný výraz, nemusíme vypisovat).

a)

$$\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cancel{(\cos x - \sin x)} \cdot (\cos x + \sin x)}{\cancel{\cos x - \sin x}} =$$

$$= \cos x + \sin x \ \wedge\ \cos x \neq \sin x \ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{\cos x + \sin x \quad \wedge\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}$$

b)

$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\ \cos x}} = -\sin x\ \cos x \ \wedge$$

$$\wedge\ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq k\pi \wedge \operatorname{tg} x \neq \operatorname{cotg} x\right) \ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{-\sin x\ \cos x\ \wedge x \neq k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}}}$$

□

Cvičení

1) Určete:

a) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

b) $\cos\left(-\frac{77}{2}\pi\right)$ $[0]$

c) $\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

d) $\operatorname{tg}\left(\frac{55}{6}\pi\right)$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

2) Zjistěte, pro která x platí:

a) $\sin x > 0 \wedge \cos x > 0$ $\left[x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

b) $\sin x \leq 0 \wedge \cos x \leq 0$ $\left[x \in \langle \frac{3\pi}{2}, \pi\rangle + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

3) Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

b) $\cos 2x = 1$ $[x = k\pi\ k \in \mathbb{Z}]$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

d) $\operatorname{cotg} 6x = -1$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right]$

e) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

4) Upravte následující výrazy (tak, aby vyšel uvedený výsledek):

a) $\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x}$ $\left[\frac{1}{\sin x}\ \wedge\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

b) $\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$ $[2 \operatorname{tg} x]$

c) $\frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ $\left[1 + \sin 2x\ \wedge\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ k \in \mathbb{Z}\right]$

d) $\frac{\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}$ $\left[\operatorname{cotg} x\ \operatorname{cotg} y \wedge \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge y \neq x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)\right]$

2.4.7 Základní vlastnosti funkcí (funkce rostoucí, klesající, sudé, liché, periodické, ohraničené)

Příklad 2.76. Ukažte, že je-li funkce f rostoucí, je nutně

a) funkce $2f$ rostoucí.

b) funkce $-f$ klesající.

c) funkce f^2 rostoucí.

d) funkce $\frac{1}{f}$ klesající (pro všude nenulovou funkci f).

Řešení. Postupně ukážeme:

a) Funkce f je rostoucí, platí-li $\forall x_1, x_2 \in D_f: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Násobení nerovnosti konstantou je ekvivalentní úprava.

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 2 \cdot f(x_1) < 2 \cdot f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \Rightarrow 2f(x_1) < 2f(x_2)$$

Funkce $2f$ je rostoucí.

b)
$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) > -f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2)$$
Funkce $-f$ je klesající.

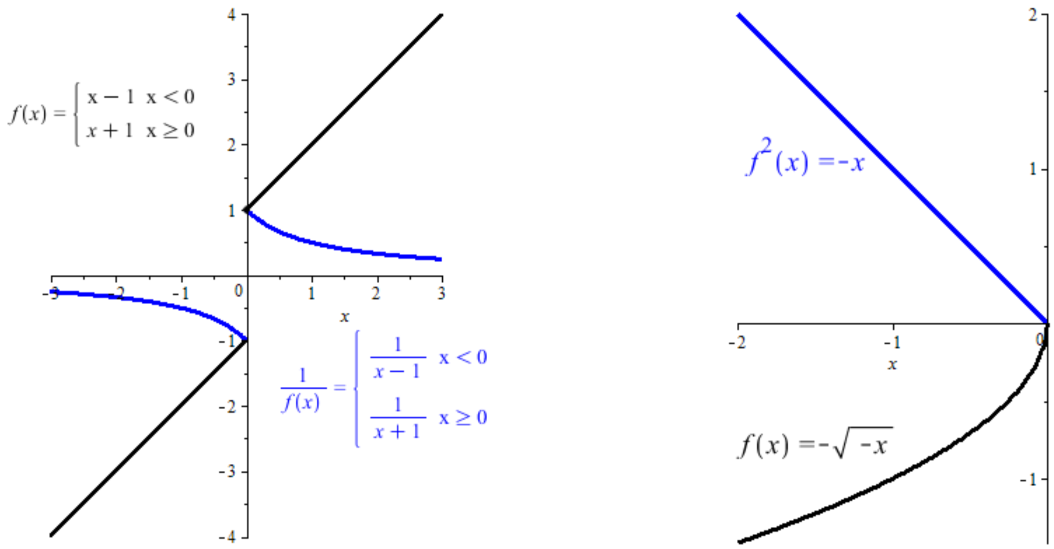
c) Umocnění na druhou a převrácená hodnota nerovnosti je ekvivalentní úprava pouze v případě nerovnosti mezi nezápornými veličinami. Obecně tvrzení neplatí, uvedeme protipříklad (viz Obr. 2.23):

$$f(x) = -\sqrt{-x},\ x \leq 0 \text{ je rostoucí, } f^2(x) = \left(-\sqrt{-x}\right)^2 = -x,\ x \leq 0 \text{ je klesající.}$$

d) Obecně tvrzení neplatí, uvedeme protipříklad (viz Obr. 2.23):

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases} \text{ je rostoucí na } \mathbb{R}\text{, pro } \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1} & x < 0 \end{cases} \text{ platí}$$

$$-1 < 1 \wedge f(-1) = -\frac{1}{2} < f(1) = \frac{1}{2}, \text{ tedy } \frac{1}{f} \text{ není na } \mathbb{R} \text{ rostoucí.}$$



c) d)

Obr. 2.23

□

Příklad 2.77. Ukažte, že pro libovolnou funkci f definovanou na intervalu $(-a, a)$, $a > 0$ platí, že

a) $f(x) + f(-x)$ je sudá funkce, b) $f(x) - f(-x)$ je lichá funkce.

Řešení. Postupně ukážeme:

a) Označme $g(x) := f(x) + f(-x)$. Je-li g sudá funkce, musí platit $g(-x) = g(x)$, tedy

$$\underline{\underline{g(-x)}} = f(-x) + f\left(-(-x)\right) = f(-x) + f(x) = \underline{\underline{g(x)}}, \text{ funkce je sudá.}$$

b) Označme $h(x) := f(x) - f(-x)$. Pro lichou funkci platí $h(-x) = -h(x)$, tedy

$$\underline{\underline{h(-x)}} = f(-x) - f\left(-(-x)\right) = f(-x) - f(x) = -\left(f(x) - f(-x)\right) = \underline{\underline{-h(x)}}, \text{ funkce je lichá.}$$

□

Příklad 2.78. Nechť jsou funkce f a g periodické se stejnou periodou. Ukažte, že funkce $f + g$ je také periodická.

Řešení. Jsou-li f a g periodické funkce, platí $\exists p \in \mathbb{R}$:

$$f(x+p) = f(x), \quad g(x+p) = g(x).$$

Odtud

$$\underline{\underline{(f+g)\,(x+p)}} = f(x+p) + g(x+p) = f(x) + g(x) = \underline{\underline{(f+g)\,(x)}}.$$

□

Příklad 2.79. Nechť funkce f je periodická s periodou p. Je-li $a \neq 0$, jakou periodu má funkce $f(a\,x)$?

Řešení. Označme $g(x) := f(a\,x)$. Potom

$$g(x) = f(a\,x) = f(ax + p) = f\left(a\left(x + \frac{p}{a}\right)\right) = g\left(x + \frac{p}{a}\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f(ax) \text{ má periodu } \frac{p}{a}}}.$$

□

Příklad 2.80. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou periodické, a najděte jejich periodu:

$$\text{a) } f(x) = 3, \quad \text{b) } f(x) = \sin\frac{2x}{3}, \quad \text{c) } f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

Řešení. Postupně ukážeme:

a)

$$f(x+p) = 3 \;\; \forall p \in \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{\text{funkce je periodická s libovolnou reálnou periodou}}},$$

b)

$$f(x) = \sin\frac{2x}{3} = |\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi)|\sin\left(\frac{2x}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}(x + 3\pi)\right) =$$

$$f(x + 3\pi) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{funkce je periodická s periodou } 3\pi}},$$

c)

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} = \sin\left(\frac{1}{x} + 2\pi\right), \quad f(x+p) = \sin\frac{1}{x+p}$$

$$\Rightarrow \text{nelze najít } p \text{ nezávisle na } x \text{ tak, aby platilo } \frac{1}{x+p} - \frac{1}{x} = 2\pi \Rightarrow \underline{\underline{\text{není periodická}}}.$$

□

Příklad 2.81. Funkce f a g jsou ohraničené na intervalu I. Je také funkce $f+g$ ohraničená na I?

Řešení. Podle předpokladu platí

$$(\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\ \forall y \in f\,(I)\,,\ y = f(x) : k_1 \leq y \leq k_2\ ) \wedge$$
$$\wedge\, (\exists\, l_1, l_2 \in \mathbb{R}\ \forall y \in g\,(I)\,,\ y = g(x) : l_1 \leq y \leq l_2\ ) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \forall y \in (f+g)\,(I)\,,\ y = (f+g)\,(x) : k_1 + l_1 \leq y \leq k_2 + l_2 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{f+g \text{ je ohraničená na } I}}$$

□

Cvičení

1) Nechť funkce f a g jsou definovány na stejném intervalu.

   a) Jsou-li funkce f i g rostoucí, je i funkce $f+g$ rostoucí? [Ano]

   b) Najděte rostoucí funkci f a klesající funkci g tak, aby funkce $f+g$ byla rostoucí.

2) Nechť f je lichá funkce, která je definovaná pro $x = 0$. Jakou zde má funkční hodnotu?

3) Najděte konstantu k tak, aby

   a) $f(x) = x^2 + kx + 1$ byla sudá, [$k = 0$]

   b) $f(x) = x^3 - kx^2 + 2x$ byla lichá. [$k = 0$]

4) Zjistěte, které z uvedených funkcí jsou sudé (resp. liché):

a) $f(x) = 2$
b) $f(x) = \sqrt{x}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
d) $f(x) = x - x^2$
e) $f(x) = x^3 - x$
f) $f(x) = \frac{1}{2x}$
g) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$
h) $f(x) = \frac{x^2}{1+4x^4}$
i) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
j) $f(x) = x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
k) $f(x) = x^2 + \sin x^2$
l) $f(x) = \cos(\pi - x)$
m) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
n) $f(x) = \frac{1}{4+\operatorname{cotg}^2 x}$
o) $f(x) = \sin x - \cos x$
p) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$
r) $f(x) = \frac{x+\operatorname{tg} x}{2+3\cos x}$
s) $f(x) = \frac{1+x\sin x}{x^2\cos x}$
t) $f(x) = 2^x$
u) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
v) $f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$
x) $f(x) = x\ln|x|$
y) $f(x) = \ln\frac{2-x}{2+x}$
z) $f(x) = \ln\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)$

[Sudá: a, h, j, k, l, m, n, s, u
Lichá: c, e, f, i, p, r, v, x, y
Ani sudá, ani lichá: b, d, g, o, t, z]

5) Nechť jsou funkce f a g periodické se stejnou periodou. Ukažte, že funkce $f \cdot g$, f/g jsou také periodické.

6) Zjistěte, které z následujících funkcí jsou periodické, a najděte jejich periodu:

a) $f(x) = x\sin x$ [není periodická]
b) $f(x) = 2 + \cos x + \cos^2 x$ $[p = 2\pi]$
c) $f(x) = \cos x^2$ [není periodická]
d) $f(x) = 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $[p = 2\pi]$
e) $f(x) = 5\cos 2\pi x$ $[p = 1]$
f) $f(x) = 2^{3+2\sin x}$ $[p = 2\pi]$
g) $f(x) = 3\cos 3x - 5\sin 2x$ $[p = 2\pi]$
h) $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$ $[p = 2\pi]$
i) $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $[p = 2\pi]$

7) Ukažte, že platí:

a) Všechny konstantní funkce jsou ohraničené.
b) Je-li funkce f ohraničená na intervalu I, je také $-f$ ohraničená na tomto intervalu.

2.4.8 Funkce prosté a funkce inverzní

Podle definice je funkce f prostá, jestliže ke každému x z jejího definičního oboru existuje právě jedno y tak, že $y = f(x)$, tedy inverzní předpis f^{-1} přiřazující bodům y z oboru hodnot právě ta x, pro která platí $y = f(x)$, splňuje podmínku kladenou na funkci – tedy je to funkce, které říkáme inverzní.
Jestliže chceme zjistit, je-li daná funkce prostá, provádíme důkaz sporem – předpokládáme, že platí $x_1 \neq x_2$ a současně $f(x_1) = f(x_2)$. Jestliže po úpravě dostaneme jedinou možnost $x_1 = x_2$, znamená to, že funkce je prostá (dostali jsme spor s předpokladem).
Budeme-li hledat inverzní předpis, aniž se předem přesvědčíme, že daná funkce je prostá, mohou nastat dvě možnosti:

1) jediné řešení, tedy inverzní předpis je příslušná inverzní funkce,

2) více možných řešení, tedy inverzní funkce neexistuje, původní funkce nebyla prostá.

Příklad 2.82. Zjistěte, zda jsou následující funkce prosté, a v kladném případě najděte funkci inverzní:

$$\text{a) } f(x) = 3x, \quad \text{b) } f(x) = 2 + 3\sqrt{x}, \quad \text{c) } f(x) = 4^{\sin x}, \quad \text{d) } f(x) = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Řešení. Postupně ukážeme:

a)

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Leftrightarrow\; 3x_1 = 3x_2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{funkce je prostá}}}$$

$$f^{-1}: \quad x = 3y \;\Rightarrow\; y = \frac{x}{3} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{x}{3}}},$$

b)

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Leftrightarrow\; 2 + 3\sqrt{x_1} = 2 + 3\sqrt{x_2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{je prostá}}}$$

$$f^{-1}: \quad x = 2 + 3\sqrt{y} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{y} = \frac{1}{3}(x-2) \quad \textbf{pozor:} \quad \sqrt{y} \geq 0 \;\Rightarrow\; x - 2 \geq 0$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}(x-2) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{9}(x-2)^2 \wedge \underline{x - 2 \geq 0} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{9}(x-2)^2 \wedge x \geq 2}}$$

c)

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Leftrightarrow\; 4^{\sin x_1} = 4^{\sin x_2} \;\Leftrightarrow\; \sin x_1 = \sin x_2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 + 2k\pi,$$

tedy pro různé hodnoty x dostáváme stejnou funkční hodnotu $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{funkce není prostá}}}$

d)

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Leftrightarrow\; \log_2\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}\right) = \log_2\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+1}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1} \;\Leftrightarrow\; x_1 - x_2 = \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1}$$

$$1)\; x_1 > x_2 \;\Rightarrow\; x_1 - x_2 > 0 \wedge \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} < 0 \quad \text{spor}$$

$$2)\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; x_1 - x_2 < 0 \wedge \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} > 0 \quad \text{spor}$$

$$3)\; x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; x_1 - x_2 = \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} = 0 \quad \text{platí} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{funkce je prostá}}}$$

$$f^{-1}: \quad x = \log_2\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \;\Leftrightarrow\; 2^x = y + \sqrt{y^2+1} \;\Leftrightarrow\; 2^x - y = \sqrt{y^2+1}\;\Big|^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2^{2x} - 2\cdot 2^x \cdot y + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 2^{x+1}\cdot y = 2^{2x} - 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{2^{2x}-1}{2^{x+1}}}}$$

$\square$

Cvičení

1) Ukažte, že inverzní funkce k prosté liché funkci je opět lichá. Co můžeme říci o inverzní funkci k prosté sudé funkci?

2) Zjistěte, které z následujících funkcí jsou prosté, a najděte k nim inverzní funkce:

   a) $f(x) = (x-2)(x+2)$ [není prostá]

   b) $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{(x-3)^2}{(2x-1)^2} \wedge x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \langle 3, \infty)\right]$

   c) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ [není prostá]

   d) $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$ $\left[f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}\right]$

   e) $f(x) = 3^{\frac{x}{x-1}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x}{\log_3 x - 1} \quad \left(= \frac{\ln x}{\ln x - \ln 3}\right)\right]$

   f) $f(x) = 1 + \sqrt{3 + e^{2x}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x - 2) \quad \left(= \ln\sqrt{x^2-2x-2}\right)\right]$

   g) $f(x) = 2^{1+\ln\sqrt{x-2}}$ $\left[f^{-1}(x) = 2 + \mathrm{e}^{2\log_2 x - 2}\right]$

   h) $f(x) = \begin{cases} x & x \le 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ $\left[f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \le 1 \\ \frac{x}{2} & x > 2 \end{cases}\right]$

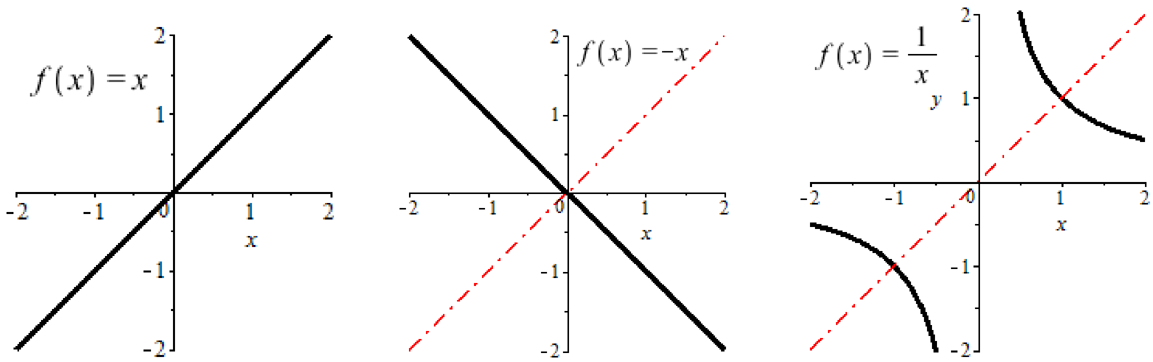
3) Ve druhém sloupci najděte funkce inverzní k funkcím v prvním sloupci. Nejdříve se pokuste výsledek „uhodnout“ a potom se přesvědčte o správnosti.

$f_1(x) = \frac{1}{x+2}$	$g_1(x) = \frac{x}{1-x}$
$f_2(x) = \frac{x}{x-1}$	$g_2(x) = \frac{x}{x-1}$
$f_3(x) = 3 + \frac{1}{x}$	$g_3(x) = \frac{1}{x} - 2$
$f_4(x) = \frac{x}{2} - 2$	$g_4(x) = \frac{1}{x-3}$
$f_5(x) = \frac{x}{x+1}$	$g_5(x) = 2x + 4$

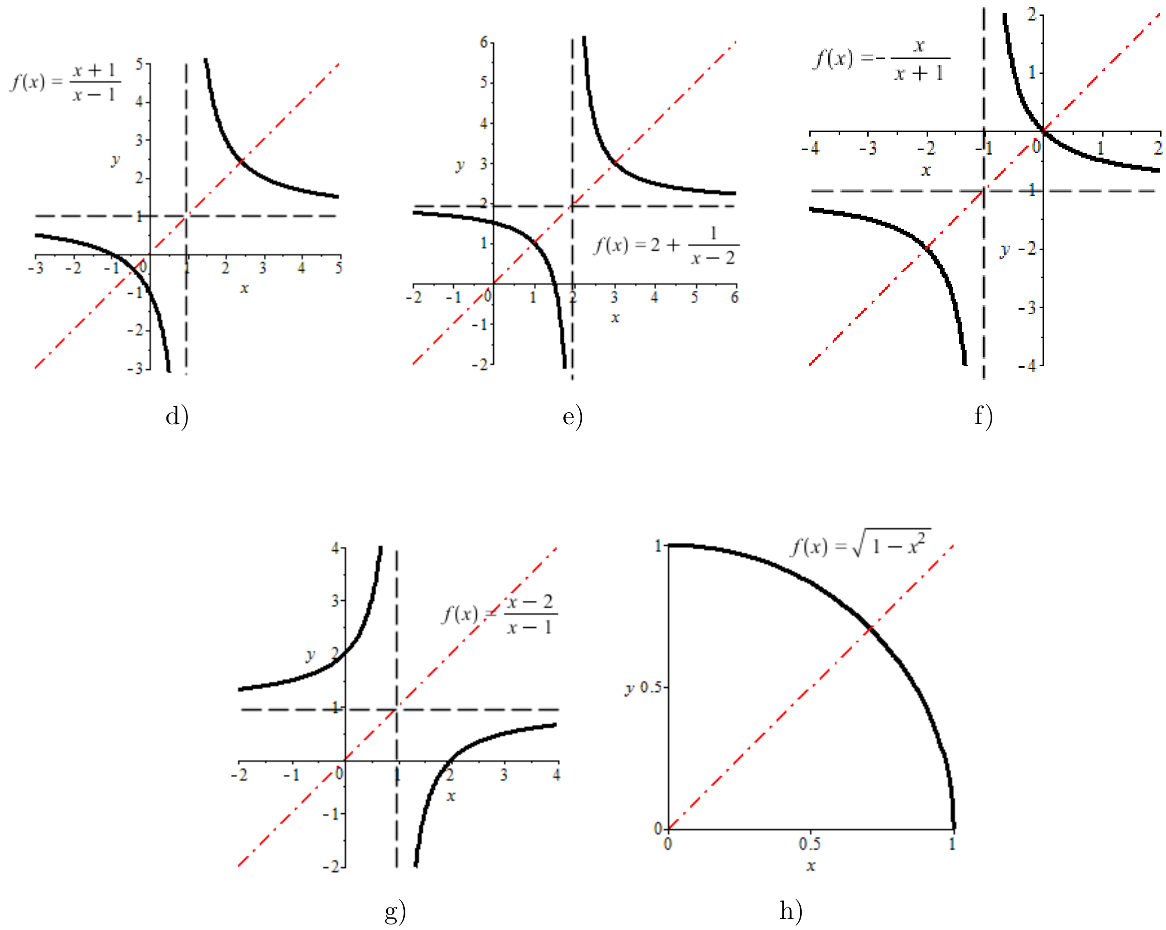
$[f_1 \leftrightarrow g_3, \quad f_2 \leftrightarrow g_2, \quad f_3 \leftrightarrow g_4, \quad f_4 \leftrightarrow g_5, \quad f_5 \leftrightarrow g_1]$

4) Ukažte, že každá z následujících funkcí je sama k sobě inverzní a nakreslete jejich grafy (v př. g) pro $a = 1$, $b = -2$). Protože graf inverzní funkce vznikne překlopením grafu původní funkce podle osy 1. a 3. kvadrantu, musí být graf funkce, která je inverzní sama k sobě, souměrný podle této osy (řešení viz Obr. 2.24).

a) $f(x) = x$	b) $f(x) = -x$	c) $f(x) = \frac{1}{x}$
d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$	e) $f(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$	f) $f(x) = -\frac{x}{x+1}$
g) $f(x) = \frac{ax+b}{x-a}$	h) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pro $x \geq 0$	



a) b) c)



$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
d)
$f(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$
e)
$f(x) = -\frac{x}{x+1}$
f)
$f(x) = \frac{x-2}{x-1}$
g)
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$
h)

Obr. 2.24

2.4.9 Složené funkce

To, jestli rozumíme pojmu funkce, se nejlépe pozná u funkcí složených. Ty jak známo vzniknou dosazením – do vnější složky $F(x)$ dosadíme místo x vnitřní složku $g(x)$ a dostaneme složenou funkci $f(x) = F(g(x))$. Obvyklé označení $f = F \circ g$ čteme F po g.

Je důležité si uvědomit, že se při tomto dosazení uplatní jen ty prvky x z definičního oboru vnitřní složky, pro které hodnoty $g(x)$ padnou do definičního oboru vnější složky. Při vyšetřování definičních oborů v odstavci 2.4.3 jsme to automaticky brali v úvahu. V tomto odstavci to provedeme podrobně – všimneme si jednotlivých složek složených funkcí.

Poznamenejme, že zde ***nejde o výsledek*** (mohli bychom postupovat jako v 2.4.3), ***ale*** právě ***o postup***, pomocí kterého výsledek získáme – všimneme si oboru hodnot vnitřních složek a jejich souvislostí s definičním oborem vnější složky.

Příklad 2.83. Určete (přirozené) definiční obory daných složených funkcí tak, že je rozložíte na jednotlivé složky a potom určíte jejich definiční obory a potřebné obory hodnot:

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}, \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[4]{\left(3+4\sqrt[3]{2x}\right)^5}, \quad \text{c) } f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

Řešení. Postupně vyřešíme:

a) Vidíme na první pohled, že jediná podmínka, kterou musíme vzít v úvahu, je nenulová hodnota jmenovatele – tedy $\sqrt[3]{x} \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -1$ (třetí – lichá odmocnina je definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$). Na tomto příkladu si ukážeme podrobně postup rozložení na jednotlivé složky:

$$f(x) = F(g(x)), \quad F(t) = \frac{t}{1+t} \ \wedge \ t = g(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$D_f : \ t \neq -1; \ \ D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{F\circ g} : \ g(x) = t = \sqrt[3]{x} \in D_F \ \Leftrightarrow \ \sqrt[3]{x} \neq -1 \ \Leftrightarrow \ x \neq -1 \ \Rightarrow \ D_{F\circ g} = \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{-1\}}}$$

b)

$$f(x) = F(g(h(x)))$$

$$F(u) = u^{\frac{5}{4}} \ \wedge \ u = g(v) = 3 + 4\cdot\sqrt[3]{2}\cdot v \ \wedge \ v = h(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$D_h = \mathbb{R}; \quad D_g = \mathbb{R} \ \Rightarrow \ D_{g\circ h} = \mathbb{R}; \quad D_F : u = 3 + 4\cdot\sqrt[3]{2}\cdot v \geq 0 \ \Leftrightarrow \ v \geq -\frac{3}{4\cdot\sqrt[3]{2}}$$

$$D_{F\circ g\circ h} : \ v = \sqrt[3]{x} \geq -\frac{3}{4\cdot\sqrt[3]{2}} \ \Leftrightarrow \ x \geq -\frac{27}{128} \ \Rightarrow \quad D_{F\circ g\circ h} = \underline{\underline{D_f = \left\langle -\frac{27}{128}, \infty\right)}}$$

c)

$$f(x) = F\left(g\left(h\left(\varphi(x)\right)\right)\right)$$

$$F(u) = \ln u \ \wedge \ u = g(v) = \sqrt{v} \ \wedge \ v = h(w) = \frac{1-w}{1+w} \ \wedge \ w = \varphi(x) = \sin x$$

$$D_\varphi = \mathbb{R}; \quad D_h : w \neq -1 \Rightarrow D_{h\circ\varphi} : w = \sin x \neq -1 \ \Rightarrow \ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$D_{F\circ g} : \ v = \frac{1-w}{1+w} > 0 : \quad \begin{array}{ccccc} & -1 & & 1 & \\ \hline - & & + & & - \end{array} \quad D_{F\circ g} = (-1, 1)$$

$$D_{F\circ g\circ h} : w = \sin x \in (-1, 1) \ \Rightarrow$$

$$D_{F\circ g\circ h\circ\varphi} : \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}}}$$

□

Příklad 2.84. Zjistěte, zda pro následující funkce platí $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$:

$$\text{a) } f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{b) } f(x) = a - \frac{1}{x+b}, \ \text{kde } a + b = 1.$$

Řešení. Provedeme naznačenou kompozici funkcí – zjistíme příslušný přiřazovací předpis, přičemž musíme sledovat i její definiční obor. Označme $g(x) := x$, $D_g = \mathbb{R}$.

a)

$$f\left(f(x)\right) = 1 - \frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x} \ \wedge \ x \notin \{0, 1\}$$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \wedge x \notin \{0, 1\} \ \Rightarrow \ D_{f\circ f\circ f} \neq D_g \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x\,\Big|_{\mathbb{R}-\{0,1\}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f\left(f\left(f(x)\right)\right) \neq x}}$$

b)

$$f\left(f(x)\right) = a - \frac{1}{f(x) + b}\Bigg|_{a+b=1} = a - \frac{1}{a - \frac{1}{x+b} + b}\Bigg|_{a+b=1} = a - \frac{1}{1 - \frac{1}{x+b}}\Bigg|_{a+b=1} =$$

$$= a - \frac{x+b}{x+b-1}\Bigg|_{a+b=1} = a - \frac{x+b}{x-a} \ \wedge \ a + b = 1 \wedge x \neq a \wedge x \neq -b$$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = a - \frac{a - \frac{1}{x+b} + b}{a - \frac{1}{x+b} - a}\Bigg|_{a+b=1} = a - \frac{1 - \frac{1}{x+b}}{-\frac{1}{x+b}}\Bigg|_{a+b=1} = a - \frac{x+b-1}{-1}\Bigg|_{a+b=1} =$$

$$= a + x + b - 1\,|_{a+b=1} = x \;\wedge\; x \notin \{a, -b\} \;\Rightarrow\; D_{f\circ f\circ f} \neq D_g$$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x\,\Big|_{\mathbb{R}-\{a,-b\}} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{f\left(f\left(f(x)\right)\right) \neq x}}$$

□

Příklad 2.85. Najděte funkce $f(t)$, pro které platí:

a) $f(2x) = x$, b) $f(x+1) = x$, c) $f(1-x) = x$, d) $f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, e) $f\left(x^2\right) = x$.

Řešení. Postupně vyřešíme:

a)

$$f(t) = \frac{t}{2} \;\wedge\; t = g(x) = 2x \;\Rightarrow\; (f\circ g)(x) = \frac{2x}{2} = x \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f(t) = \frac{t}{2}}}$$

b)

$$f(t) = t - 1 \;\wedge\; t = g(x) = x + 1 \;\Rightarrow\; (f\circ g)(x) = (x+1) - 1 = x \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f(t) = t - 1}}$$

c)

$$f(t) = 1 - t \;\wedge\; t = g(x) = 1 - x \;\Rightarrow\; (f\circ g)(x) = 1 - (1 - x) = x \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f(t) = 1 - t}}$$

d) Přímo ze zadání je vidět, že taková funkce f neexistuje – v každém případě by příslušná složená funkce nebyla definovaná pro $x = 0$. Položíme

$$f(t) = \frac{1}{t} \;\wedge\; t = g(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; (f\circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \;\wedge\; x \neq 0,\ \text{tedy } f\left(\frac{1}{x}\right) \neq x.$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f\left(\frac{1}{x}\right) = x\,\Big|_{\mathbb{R}-\{0\}}}}$$

e) Jestliže položíme $f(t) = \sqrt{t} \;\wedge\; t = g(x) = x^2$, složená funkce bude mít tvar

$$(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x \qquad (|x| = x \text{ pro } x \geq 0)\,.$$

Zadání opět nelze vyhovět, protože složená funkce je nutně sudá a pravá strana definiční podmínky je lichá funkce – hledaná funkce f neexistuje. Platí

$$f(t) = \sqrt{t} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{f\left(x^2\right) = x\,\Big|_{\langle 0,\infty)}}}\,.$$

□

Cvičení

1) Následující složené funkce rozložte (vhodně) na jednotlivé složky. Určete (přirozené) definiční obory daných funkcí pomocí definičních oborů jednotlivých složek:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = F\left(g\left(h(x)\right)\right), \quad F(u) = \sqrt{u} \;\wedge\; u = g(v) = \frac{1-v}{1+v} \;\wedge\; v = h(x) = \sqrt{x} \\ D_{Fogoh} = D_f = \langle 0, 1\rangle \end{array}\right]$$

b) $f(x) = \operatorname{cotg} \sqrt[5]{(1 + x^5)}$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = F\left(g\left(h(x)\right)\right) \\ F(u) = \operatorname{cotg} u \;\wedge\; u = g(v) = \sqrt[5]{v} \;\wedge\; v = h(x) = 1 + x^5 \\ D_{Fogoh} = D_f = \mathbb{R} - \left\{\sqrt[5]{k^5\pi^5 - 1},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \end{array}\right]$$

c) $f(x) = \sin\left(\sin(\sin x)\right)$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = F\left(g\left(h(x)\right)\right) \\ F(u) = \sin u \;\wedge\; u = g(v) = \sin v \;\wedge\; v = h(x) = \sin x \\ D_{Fogoh} = D_f = \mathbb{R} \end{array}\right]$$

d) $f(x) = \sin^3\left(\cos^2 x\right)$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = F\left(g\left(h\left(\varphi(x)\right)\right)\right) \\ F(u) = u^3 \;\wedge\; u = g(v) = \sin v \;\wedge\; v = h(w) = w^2 \;\wedge\; w = \cos x \\ D_{Fogoho\varphi} = D_f = \mathbb{R} \end{array}\right]$$

e) $\mathrm{e}^{\sqrt{3x-2-x^2}}$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = F\left(g\left(h(x)\right)\right) \\ F(u) = \mathrm{e}^u \wedge u = g(v) = \sqrt{v} \wedge v = h(x) = 3x - x^2 - 2 = -(x-1)(x-2) \\ D_{Fogoh} = D_f = \langle 1, 2\rangle \end{array}\right]$$

f) $f(x) = \ln\left(\sin x - 1\right)$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = F\left(g\left(h(x)\right)\right) \\ F(u) = \ln u \;\wedge\; u = g(v) = v - 1 \;\wedge\; v = h(x) = \sin x \\ D_{Fogoh} = D_f = 0 \end{array}\right]$$

2) Ověřte, zda následující funkce splňují vztah $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$:

a) $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$ $\qquad \left[f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x\,\big|_{\mathbb{R}-\{1,2\}}\,, \quad f\left(f\left(f(x)\right)\right) \neq x\right]$

b) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ $\qquad \left[f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x\,\big|_{\mathbb{R}-\{-1,0\}}\,, \quad f\left(f\left(f(x)\right)\right) \neq x\right]$

3) Najděte funkce $f(t)$, pro které platí:

a) $f(2x) = 4x - 1$ b) $f(x+1) = 4x - 1$ c) $f(1-x) = 4x - 1$

d) $f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x - 1$ e) $f(x^2) = 4x - 1$

2.5 Analytická geometrie

Analytická geometrie zkoumá útvary v rovině a prostoru pomocí jejich analytického vyjádření – tedy pomocí rovnic, které je popisují jako množiny bodů v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$. K tomuto popisu je výhodné zavést pojem **vektoru** jako množiny všech rovnoběžných souhlasně orientovaných a stejně dlouhých úseček (tzv. volný vektor). Tato množina je určena jednou (libovolnou) z těchto úseček, která má svůj počáteční a koncový bod. Jestliže je v rovině zaveden souřadnicový systém, můžeme počáteční bod vektoru umístit do počátku souřadnic. Potom souřadnice koncového bodu pokládáme za souřadnice (volného) vektoru. Vektor tedy může být určen dvojicí (resp. trojicí) reálných čísel – souřadnic – a pomocí těchto souřadnic lze provádět různé operace (viz kapitola 1.4). Zobecněním na uspořádané n-tice čísel se definují aritmetické vektory. Jestliže se neomezíme na n-tice čísel, ale budeme uvažovat n-tice libovolných objektů, se kterými lze provádět analogické operace (při zachování potřebných pravidel), můžeme zavést pojem obecných vektorů a tedy pojem obecného vektorového prostoru tak, jak se zavádí v předmětu IDA. Pro naše potřeby – opakování středoškolské látky – se omezíme na vektory ve smyslu kapitoly 1.4.

Uvědomme si, že vektory v rovině (prostoru) můžeme uvažovat, i když nemáme zaveden souřadnicový systém – viz vektory ve fyzice, kde jsou některé veličiny (síla, rychlost, zrychlení apod.) určeny nejen velikostí, ale i směrem. Pro počítání s nimi je pak vhodné zavést souřadný systém, tedy vhodně umístit počátek, osy a měřítko.

Poznamenejme, že zavedeme-li v rovině nebo v prostoru souřadnicový systém a kromě bodů v něm uvažujeme i vektory se skalárním součinem, mluvíme o Eukleidovských prostorech E_2, resp. E_3.

V této části textu budeme vyšetřovat lineární útvary v rovině a prostoru – tedy přímky a roviny, a dále kvadratické útvary v rovině – tedy kuželosečky. V IDA a v letním semestru v IMA se setkáme i s kvadratickými útvary v prostoru, ty se nazývají kvadriky (např. kulové plochy, paraboloidy, válcové plochy).

2.5.1 Vektory

Příklad 2.86. V kartézské soustavě souřadnic nakreslete vektory $\mathbf{u} = (-1, 2)$ a $\mathbf{v} = (2, 1)$. Potom určete a nakreslete vektory $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}$, $-\mathbf{u}$ a určete velikost vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

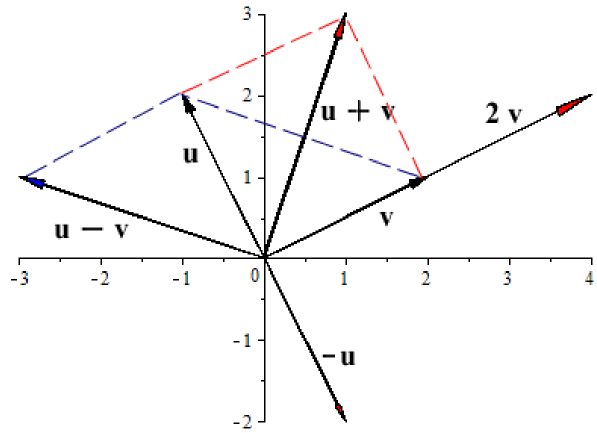
Řešení. Pro všechny hledané vektory nakreslíme umístění v počátku. Vektor, který vznikne jako součet dvou vektorů, leží v úhlopříčce rovnoběžníku, jehož sousední strany tvoří zadané vektory (viz známé skládání sil ve fyzice, viz Obr. 2.25).

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (1,3), \quad \mathbf{u}-\mathbf{v} = (-3,1), \quad 2v = (4,2), -\mathbf{u} = (1,-2)$$

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \sqrt{3}, \; |\mathbf{u}+\mathbf{v}| = \sqrt{10}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \;\Rightarrow \sphericalangle\;(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\pi}{2}$$

□



Obr. 2.25

Příklad 2.87. Jsou dány tři po sobě jdoucí vrcholy rovnoběžníku $ABCD$, kde $A = [2,-2,2]$, $B = [4,2,0]$, $C = [7,4,3]$. Určete vrchol D.

Řešení. Strany rovnoběžníku AB a BC mají společný vrchol B. Umístíme do těchto stran vektory $\mathbf{u} = A - B$ a $\mathbf{v} = C - B$. Vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v} = D - B$ leží v úhlopříčce rovnoběžníku $ABCD$, tedy platí

$$D = B+(A-B)+(C-B) = [4,2,0]+(-2,-4,2)+(3,2,5) = [4,2,0]+(1,-2,5) = \underline{\underline{[5,0,5]}}.$$

□

Příklad 2.88. Najděte číslo n tak, aby body $A = [3,-4]$, $B = [1,n]$, $C = [-1,2]$ ležely na jedné přímce.

Řešení. Body A, B a C leží na jedné přímce, jestliže jsou vektory $B - A$ a $C - A$ kolineární, tedy existuje-li číslo k tak, že platí $B - A = k \cdot (C - A)$. Odtud

$$B - A = k \cdot (C - A) \Leftrightarrow (-2, n+4) = k\,(-4,6) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2 = -4k \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ n + 4 = 6k \end{array}\right\} \underline{\underline{n = -1}}$$

□

Příklad 2.89. Najděte vnitřní úhly trojúhelníku o vrcholech $A = [2,-4,9]$, $B = [-1,-4,5]$, $C = [6,-4,6]$.

Řešení. Úhly trojúhelníku najdeme jako úhly vektorů ležících v příslušných stranách trojúhelníku:

$$\alpha = \sphericalangle\,(B - A, C - A) = \sphericalangle\,((-3,0,-4)\,,(4,0,-3))$$

$$\cos\alpha = \frac{(-3,0,-4)\cdot(4,0,-3)}{|(-3,0,-4)|\ |(4,0,-3)|} = \frac{-12+12}{\sqrt{9+16}\,\sqrt{16+9}} = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{2}}}$$

$$\beta = \sphericalangle\,(A-B)\,,(C-B) = \sphericalangle\,(3,0,4)\,,(7,0,1)$$

$$\cos\beta = \frac{(3,0,4)\cdot(7,0,1)}{|(-3,0,-4)|\ |(4,0,-3)|} = \frac{21+4}{\sqrt{9+16}\,\sqrt{49+1}} = \frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\beta = \frac{\pi}{4}}}$$

$$\gamma = \pi - \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

$\square$

Cvičení

1) Jsou dány body A, B, C, D a vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Rozhodněte, zda následující výrazy definují vektor nebo bod:

a) $A+\mathbf{a}$ b) $(C+\mathbf{a})+\mathbf{b}$ c) $A+(B-C)$

d) $A-(B-C)$ e) $(A-B)+(C-D)$ f) $A-(B+\mathbf{a})$

g) $(A+\mathbf{a})-(B+\mathbf{b})$ h) $(A+\mathbf{a})-\mathbf{b}$

[Bod: a, b, c, d, h
Vektor: e, f, g]

2) Mějme body A, B a vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Najděte vektor $\mathbf{x}$ vyhovující rovnicím

a) $\mathbf{a}+4\mathbf{x}=\mathbf{b}$ $\left[\frac{1}{4}(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right]$

b) $A+\mathbf{a}+2\mathbf{x}=3b$ [nemá řešení]

c) $A+\mathbf{a}+3\mathbf{x}=A+2b$ $\left[\frac{2}{3}\mathbf{b}-\frac{1}{3}\mathbf{a}\right]$

d) $A+\mathbf{a}-\mathbf{x}=B$ $[(A-B)+\mathbf{a}]$

e) $A+\mathbf{a}-3\mathbf{x}=B+\mathbf{a}$ $\left[\frac{1}{3}(A-B)\right]$

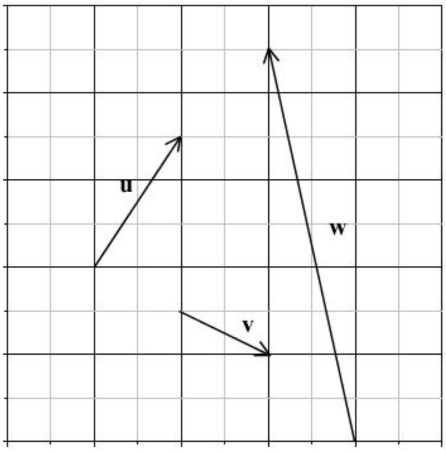
f) $2a+7\mathbf{x}=A+B$ [nemá řešení]

3) V obrázku 2.26 jsou znázorněny tři vektory. Najděte konstanty a, b tak, aby platilo $\mathbf{w}=a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$.

$[a=2,\ b=-3]$

4) Je dán trojúhelník ABC a vektory $\mathbf{a}=B-A$, $\mathbf{b}=C-B$, $\mathbf{c}=A-C$. Vyjádřete vektor $\mathbf{c}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

$[-a-b]$



Obr. 2.26

5) V rovnoběžníku $ABCD$, který má střed M, označme $\mathbf{a} = B - A$, $\mathbf{b} = D - A$. Pomocí $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vyjádřete vektory $A - M$, $B - M$, $C - M$, $D - M$.

$\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b}),\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\ -\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\right]$

6) Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé (kolineární), je-li:

a) $\mathbf{u} = (3; 1)$, $\mathbf{v} = (-1; 2)$ [ne]

b) $\mathbf{u} = (1; -4)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{2}; -6\right)$ $\left[\text{ano, } \mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u}\right]$

7) Rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ je určen vektory $\mathbf{a} = B - A$, $\mathbf{b} = D - A$, $\mathbf{c} = E - A$ a má střed M. Pomocí počátečního a koncového bodu vyjádřete vektory:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ $[G - A]$

b) $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ $[M - A]$

c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ $[C - E]$

d) $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ $[M - C]$

2.5.2 Lineární útvary v rovině – přímky

Připomeňme, že (viz odstavec 1.4) prochází-li přímka bodem A rovnoběžně s vektorem $\mathbf{s}$, je pro každý bod X ležící na této přímce vektor $X - A$ kolineární s vektorem $\mathbf{s}$, platí tedy pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ vztah $X - A = t \cdot \mathbf{s}$. Odtud dostaneme parametrickou rovnici přímky zadané bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{s}$: $X = A + t \cdot \mathbf{s}$.

Je-li zadán souřadnicový systém, potom pro souřadnice bodů X na přímce dostaneme jednotlivé parametrické rovnice. Z nich pak pro přímku v rovině vyloučením parametru t dostaneme obecnou rovnici přímky tvaru $ax + by + c = 0$ (v trojrozměrném prostoru obecná rovnice přímky neexistuje – uvidíme v dalším odstavci). Přitom je-li $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, platí $(a, b) \cdot (s_1, s_2) = 0$, tedy vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ je normálový vektor přímky $ax + by + c = 0$ (je na ni kolmý).

Příklad 2.90. Najděte rovnici přímky, která je zadaná

a) bodem $A = [2, -3]$ a směrovým vektorem $\mathbf{s} = (1, 4)$, b) dvěma body $A = [1, 3]$, $B = [2, 5]$.

Řešení. Postupně vyřešíme:

a) $p: \ X = A + t\mathbf{s} = [2, -3] + t\,(1, 4)$

$$\left.\begin{array}{l|l} x = 2 + t & \cdot 4 \\ y = -3 + 4t & \cdot -1 \end{array}\right\} + \qquad \underline{\underline{4x - y - 11 = 0}}$$

b) $p: \ X = A + t\,(B - A) = [1, 3] + t\,([2, 5] - [1, 3])$

$$\left.\begin{array}{l|l} x = 1 + t & \cdot 2 \\ y = 3 + 2t & \cdot -1 \end{array}\right\} + \qquad \underline{\underline{2x - y + 1 = 0}}$$

□

Příklad 2.91. Najděte rovnici přímky procházející bodem $A = [2, -3]$ kolmo k vektoru $\mathbf{u} = (1, 4)$.

Řešení. Zvolíme některý z následujících postupů:

1) Směrový vektor $\mathbf{s}$ hledané přímky má být kolmý na zadaný vektor $\mathbf{u}$, tedy má platit

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{s} = (4, -1) \quad \text{(nebo vektor s tímto kolineární)}.$$

Odtud

$$p: \ X = A + t\mathbf{s} = [2, -3] + t\,(4, -1)$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x = 2 + 4t & \\ y = -3 - t & \cdot 4 \end{array}\right\} + \qquad \underline{\underline{x + 4y + 10 = 0}}$$

2) Vektor $\mathbf{u} = (1, 4)$ je normálový vektor a rovnice přímky má tvar $x + 4y + c = 0$. Konstantu c určíme z podmínky, že na přímce leží bod A. Platí tedy

$$2 + 4 \cdot (-3) + c = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{c = 10}}.$$

□

Příklad 2.92. Najděte jednotkový směrový vektor přímky $4x - 3y + 8 = 0$.

Řešení.

$$p: \; ax + by + c = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{s} = (-b, a)\,, \quad \mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\mathbf{s} = (3, 4)\,, \quad \mathbf{s}_0 = \left(\frac{3}{\sqrt{25}}, \frac{4}{\sqrt{25}}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)}}$$

□

Příklad 2.93. Určete hodnotu parametru a, pro kterou přímka $p: \; ax + 3y - 1 = 0$ svírá s kladným směrem o_x úhel $\frac{3}{4}\pi$.

Řešení. Přímka je grafem lineární funkce $y = k \cdot x + q$, kde k je směrnice přímky, $k = \operatorname{tg} \varphi$, φ je úhel, který přímka svírá s kladným směrem osy o_x. Odtud

$$ax + 3y - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{a}{3}x + \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; k = -\frac{a}{3} = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi = -1 \;\Rightarrow\; -\frac{a}{3} = -1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a = 3}}$$

□

Příklad 2.94. Najděte rovnici osy úsečky $\overline{AB}$, kde $A = [7, -3]$, $B = [-2, 1]$.

Řešení.

Úsečka:

$$X = A + t\,(B - A)\,, \; t \in \langle 0, 1 \rangle \qquad \left.\begin{array}{l|l} x = 7 - 9t & \cdot 4 \\ y = -3 + 4t & \cdot 9 \end{array}\right\} + \Rightarrow\; 4x + 9y = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{n} = (4, 9)$$

Střed úsečky: $S = \left[\frac{7-2}{2}, \frac{-3+1}{2}\right] = \left[\frac{5}{2}, -1\right]$

$$\text{nebo } S = A + \frac{1}{2}\,(B - A) \qquad \left.\begin{array}{l} s_1 = 7 - \frac{9}{2} \\ s_2 = -3 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \left[\frac{5}{2}, -1\right]$$

$$\text{Osa: } X = S + \mathbf{n} \cdot t, \; t \in \mathbb{R} \qquad \left.\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} + 4t \\ y = -1 + 9t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l|l} 2x = 5 + 8t & \cdot 9 \\ y = -1 + 9t & \cdot -8 \end{array}\right\} +$$

$\Rightarrow \ \underline{\underline{18x - 8y - 53 = 0}}$

□

Příklad 2.95. Odvoďte vztah pro vzdálenost bodu $X = [x_0, y_0]$ od přímky $p: \ ax + by + c = 0$.

Řešení. Pro směrový vektor přímky q kolmé na přímku p platí $\mathbf{s} = (a, b)$, tedy

$$p: \begin{array}{l} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt. \end{array}$$

Pro průsečík přímek $p, q: \ P = [x_0 + at_0, y_0 + bt_0]$ platí

$$a(x_0 + at_0) + b(y_0 + bt_0) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0\left(a^2 + b^2\right) = -(ax_0 + by_0 + c),$$

tedy

$$t_0 = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Vzdálenost je tedy

$$d(P, X) = \sqrt{(x_0 + at_0 - x_0)^2 + (y_0 + bt_0 - y_0)^2} = \sqrt{(at_0)^2 + (bt_0)^2} = |t_0|\sqrt{a^2 + b^2} =$$
$$= \underline{\underline{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}}.$$

□

Příklad 2.96. Najděte rovnici přímky procházející bodem $A = [4, -2]$ ve vzdálenosti $d = 2$ od počátku souřadné soustavy.

Řešení.

$$O = [0, 0], \quad p: \ ax + by + c = 0, \quad [4, -2] \in p, \quad d = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2, \quad \text{položme } c = 2.$$

Potom $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \ \wedge \ 2a - b + 1 = 0 \ \Rightarrow \ a^2 + b^2 = 1 \ \wedge \ b = 2a + 1$

$$a^2 + (2a + 1)^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ a^2 + 4a^2 + 4a + 1 = 1 \ \Leftrightarrow \ 5a^2 + 4a = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = 0, \ a_2 = -\frac{4}{5},$$
$$b_1 = 1, \ b_2 = -\frac{3}{5}.$$

$p_1: \ y + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{y = 2}}$

$p_2: -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{4x + 3y - 10 = 0}}$

□

Cvičení

1) Najděte rovnici přímky procházející daným bodem

   1. rovnoběžně s daným vektorem.
   2. kolmo na daný vektor.

   a) $[2,3]\,,\ (4,5)$ $\quad[1)\ 5x-4y+2=0,\quad 2)\ 4x+5y-23=0]$

   b) $[4,5]\,,\ (2,3)$ $\quad[1)\ 3x-2y+2=0,\quad 2)\ 2x+3y-23=0]$

   c) $[1,0]\,,\ (-2,1)$ $\quad[1)\ x+2y-1=0,\quad 2)\ 2x-y-2=0]$

   d) $[2,-1]\,,\ (1,3)$ $\quad[1)\ 3x-y-7=0,\quad 2)\ x+3y+1=0]$

2) Najděte jednotkové směrové vektory přímek

   a) $\pi x - y\sqrt{2} = 7$ $\quad\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\pi^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2+\pi^2}}\right)\right]$

   b) $y = 3x+7$ $\quad\left[\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\right]$

   c) $2(x-1)+5(y-2)=0$ $\quad\left[\left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29}\right)\right]$

3) Je dána přímka $p:\ 3x-y+4=0$. Najděte rovnici přímky q, která prochází bodem $A=[1,1]$

   a) rovnoběžně s přímkou p $\quad[q:\ 3x-y-2=0]$

   b) kolmo na přímku p $\quad[q:\ x+y-4=0]$

4) Pro jakou hodnotu parametru a jsou přímky

$$p:\ 3ax-8y+13=0,\qquad q:(a+1)x-2ay-21=0$$

   rovnoběžné?

$$\left[a\in\left\{-\tfrac{2}{3},2\right\}\right]$$

5) Najděte obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A=[15,-3]$ a průsečíkem přímek $3x-5y+12=0$, $5x+2y-42=0$.

$$[x+y-12=0]$$

6) Určete vzájemnou polohu přímek p a q. Jsou-li různoběžné, najděte jejich průsečík, jsou-li rovnoběžné, určete jejich vzdálenost.

   a) $p: 2x-y+3=0,\quad q: x+2y=0$ $\quad\left[\text{kolmé přímky, } P=\left[\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right]\right]$

   b) $p: 2x-y+3=0,\quad q: \begin{cases} x=-1+t\\ y=3+2t\end{cases}$ $\quad\left[\text{rovnoběžné přímky, } d=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

c) $p: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \end{cases}, \quad q: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 6t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ [totožné přímky]

2.5.3 Lineární útvary v prostoru – přímky a roviny

Analogicky jako v rovině dostaneme parametrickou rovnici přímky zadané bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{s}$ jako $X = A + t \cdot \mathbf{s}$. Je-li zadán souřadnicový systém, potom pro souřadnice bodů X na přímce dostaneme jednotlivé parametrické rovnice, které jsou tři a obsahují jeden parametr. Proto (v obecném případě) nemůžeme z těchto rovnic parametr vyloučit. V prostoru kromě parametrické rovnice (nebo v souřadnicích **tří** parametrických rovnic) přímku můžeme zadat jako průsečnici dvou rovin.

Parametrickou rovnici roviny ρ procházející třemi body A, B, C, které neleží v přímce, dostaneme z faktu, že pro libovolný bod $X \in \rho$ je vektor $X - A$ lineární kombinací vektorů $B - A$ a $C - A$, tedy platí

$$X - A = t_1 (B - A) + t_2 (C - A), \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

neboli

$$X = A + t_1 (B - A) + t_2 (C - A)$$

a pro rovinu procházející bodem A rovnoběžně se dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ má parametrická rovnice tvar

$$X = A + t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}.$$

Vyjádříme-li rovnici v souřadnicích, můžeme oba parametry eliminovat (viz kapitola 1.4) a dostaneme obecnou rovnici roviny, která má tvar $ax+by+cz+d=0$, přičemž $(a,b,c) = \mathbf{n}$ je její normálový vektor.

Příklad 2.97. Najděte rovnice přímek v prostoru, které procházejí bodem $A = [4, -5, 7]$ a jsou rovnoběžné

a) s osou o_x, b) s osou o_y, c) s osou o_z, d) s přímkou $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3$.

Řešení. Postupně vyřešíme:

$$\text{a)}\ s = (1,0,0), \quad p: \begin{array}{l} x = 4 + t \ (= t_1) \\ y = -5 \\ z = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \underline{\underline{X = [t; -5; 7],\ t \in \mathbb{R}}}$$

$$\text{b)}\ s = (0,1,0), \quad p: \begin{array}{l} x = 4 \\ y = t \\ z = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \underline{\underline{X = [4; t; 7],\ t \in \mathbb{R}}}$$

c) $s = (0,0,1), \quad p: \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -5 \\ z = t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X = [4; -5; t]\,, \; t \in \mathbb{R}}}$

d) $s = (-1,2,0), \quad p: \begin{array}{l} x = 4 - t \\ y = -5 + 2t \\ z = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X = [4 - t; -5 + 2t; 7]\,, \; t \in \mathbb{R}}}$

□

Příklad 2.98. Najděte obecnou rovnici roviny ρ procházející bodem $A = [-2,-8,1]$ rovnoběžně s rovinou $r: 3x - 2y + 3z - 10 = 0$.

Řešení.

$r \parallel \rho \quad \Rightarrow \quad$ roviny mají stejné normálové vektory $(3,-2,3)$ a $A \in \rho$:

$\rho: 3x - 2y + 3z + d = 0 \;\wedge\; [-2,-8,1] \in \rho \;\Rightarrow\; -6 + 16 + 3 + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -13$

$\Rightarrow \; \rho: \underline{\underline{3x - 2y + 3z - 13 = 0}}$

□

Příklad 2.99. Najděte parametrickou a obecnou rovnici roviny, která je dána

a) body $A = [4,-1,2]$, $B = [3,3,3]$, $C = [-2,0,5]$.

b) bodem $A = [1,5,0]$ a přímkou $p: x = t, y = 2 + t, z = -1 + 3t$.

Řešení. Postupně vyřešíme:

a)

$$\rho: \; X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A) = \underline{\underline{[4 - t_1 - 6t_2, -1 + 4t_1 + t_2, 2 + t_1 + 3t_2]}}$$

$$\begin{array}{ll} x = 4 - t_1 - 6t_2 & r_1 + r_3: \; x + z = 6 - 3t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = 2 - \frac{x+z}{3} \\ y = -1 + 4t_1 + t_2 & y = -1 + 4\,(x + 2z - 8) + 2 - \frac{x+z}{3} \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{11x - 3y + 23z - 93 = 0}} \\ z = 2 + t_1 + 3t_2 & r_1 + 2r_3: \; x + 2z = 8 + t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = x + 2z - 8 \end{array}$$

b) $p: X = [0,2,-1] + (1,1,3) \cdot t$

Na přímce p leží bod $B = [0,2,-1]$ (pro $t = 0$). Rovina je určena bodem B a vektory $\mathbf{u} = (1,1,3)$ (směrový vektor přímky p) a $\mathbf{v} = A - B$, tedy

$$\rho: X = [0,2,-1] + (1,1,3) \cdot t_1 + ([1,5,0] - [0,2,-1])\, t_2 =$$

$$= [0, 2, -1] + (1, 1, 3) \cdot t_1 + (1, 3, 1) \cdot t_2$$

$$\begin{aligned}
&x = t_1 + t_2 && r_2 - r_1: \ y - x = 2 + 2t_2 \ \Rightarrow \ t_2 = -1 + \tfrac{y-x}{2} \\
&y = 2 + t_1 + 3t_2 && r_2 - 3r_1: \ y - 3x = 2 - 2t_1 \ \Rightarrow \ t_1 = 1 + \tfrac{3x-y}{2} \\
&z = -1 + 3t_1 + t_2 = -1 + 3\left(1 + \frac{3x-y}{2}\right) - 1 + \frac{y-x}{2} \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{8x - 2y - 2z + 1 = 0}}
\end{aligned}$$

□

Příklad 2.100. Určete odchylku rovin $\alpha : 2x + y - z - 1 = 0, \quad \beta : x - y + z = 0.$

Řešení. Odchylka rovin (úhel, který roviny svírají) je roven úhlu jejich normálových vektorů:

$$\varphi = \sphericalangle\, (\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta)\,; \qquad \begin{aligned} \mathbf{n}_\alpha &= (2, 1, -1) \\ \mathbf{n}_\beta &= (1, -1, 1) \end{aligned} \qquad \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta = 2 - 1 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{2}}}$$

□

Cvičení

1) Najděte rovnici přímky v prostoru, která je zadaná
   a) bodem $A = [1, 0, -2]$ a směrovým vektorem $\mathbf{s} = (-2, 3, 0)$
      $[X = [1 - 2t; 3t; -2]\,, \ t \in \mathbb{R}]$
   b) body $A = [1, 2, -3]$, $B = [2, -3, 0]$ $\quad [X = [1 + t; 2 - 5t; -3 + 3t]\,, \ t \in \mathbb{R}]$
2) Najděte (parametrické) rovnice přímek, ve kterých se protínají roviny
   a) $x = 1, \ y = -2$ $\quad [X = [1; -2; t]\,, \ t \in \mathbb{R}]$
   b) $x = -3, \ z = 4$ $\quad [X = [-3; t; 4]\,, \ t \in \mathbb{R}]$
   c) $y = 4, \ x + z = 2$ $\quad [X = [2 + t; 4; -t]\,, \ t \in \mathbb{R}]$
   d) $x = 7, \ 3x - 2y - z = 12$ $\quad [X = [7; t; 9 - 2t]\,, \ t \in \mathbb{R}]$
   e) $x + y = 1, \ x + 2y = -2$ $\quad [X = [4; -3; t]\,, \ t \in \mathbb{R}]$
3) Najděte (parametrické) rovnice přímek, ve kterých rovina $3x - 12y - z + 12 = 0$ protíná souřadné roviny.
   $[\rho_{xy} : X = [4t; -1 + t; 0]\,, \ \rho_{xz} : X = [4 + t; 0; 3t]\,, \ \rho_{yz} : X = [0; 1 - t; 12t]]$
4) Najděte obecnou rovnici roviny, která prochází počátkem souřadné soustavy a je kolmá na roviny $\alpha : 2x - 5y + z - 1 = 0, \quad \beta : 3x + 10y - 2z - 12 = 0.$
   $[14x - 7y + 44z = 0]$

5) Určete průsečnici rovin $\alpha : 3x + y - z = 0, \quad \beta : y + z = 0$.

[$X = [2t, -3t, 3t]\,,\ t \in \mathbb{R}$]

6) Určete vzájemnou polohu přímek p a q. Jsou-li různoběžné, najděte jejich průsečík, jsou-li rovnoběžné, najděte rovnici roviny, ve které obě leží.

a) $p : X = [2 - t, 1 + 2t, 3]\,,\ q : X = [t, -1 + 4t, 1 + 2t]$ [různoběžné, $P = [1, 2, 3]$]

b) $p : X = [2 - t, 1 + 2t, 3]\,,\ q : X = [t, -1 + 4t, 6 - 2t]$ [mimoběžné]

c) $p : X = [2 + 3t, -1 + 4t, 4 - t]\,,\ q : X = [3 - 9t, 3 - 12t, 3 + 3t]$

[rovnoběžné, $\rho :\ y + 4z - 15 = 0$]

7) Najděte rovnici přímky, která je kolmá k rovině $3x - 2y + 5z - 12 = 0$ a prochází průsečíkem této roviny s osou o_x.

[$X = [4 + 3t, -2t, 5t]\,,\ t \in \mathbb{R}$]

8) Najděte rovnici přímky, která leží v rovině $3x + y - z + 1 = 0$ a protíná přímky $X = [3 - 2t, 5 - 3t, 3 + 3t]$ a $X = [4 - 6t, 2 + 2t, 8 - 9t]$.

[$X = [1 + 3t, 2 - 2t, 6 + 7t]\,,\ t \in \mathbb{R}$]

2.5.4 Kuželosečky

Kuželosečky jsou rovinné křivky, které jsou popsány rovnicemi, v nichž proměnné x a y mohou vystupovat ve druhé mocnině, tedy rovnicemi tvaru $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f = 0$. My budeme vyšetřovat takové kuželosečky, v jejichž rovnicích je koeficient u smíšeného členu xy roven nule.

Připomeňme si, že **kružnice** k se středem S a poloměrem r je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost r, tedy je-li $S = [m, n]$, platí pro $X = [x, y] \in k$: $|X - S| = r$, neboli

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{(x-m)^2 + (y-m)^2 = r^2}}.$$

Odtud můžeme odvodit další tvar rovnice kružnice:

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 = r^2 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2ny + n^2 - r^2 = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 \ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0}},$$

přičemž **koeficienty u** x^2 **a** y^2 **jsou stejné**.

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevně zvolených bodů E, F, které nazýváme ohniska, stálý součet vzdáleností, který je větší než vzdálenost těchto daných bodů.

Platí-li $E = [-e, 0]$, $F = [e, 0]$, tedy ohniska leží na ose o_x symetricky vzhledem k počátku souřadnic, platí pro každý bod X na elipse $|X - E| + |X - F| = 2a$, tedy

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Odtud po úpravě (dvojí umocnění) vyjde

$$\left(a^2 - e^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - e^2\right)$$

a označíme-li $b = \sqrt{a^2 - e^2}$, dostáváme

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}} \quad \text{(středová rovnice elipsy).}$$

Jestliže střed neleží v počátku souřadnic, ale v bodě $S = [m, n]$, bude mít rovnice tvar

$$\underline{\underline{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}}$$

a po úpravě (a vhodném označení)

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0,$$

přičemž **koeficienty u x^2 a y^2 mají stejné znaménko**.

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou daných bodů E, F (ohnisek hyperboly) se rovná kladné konstantě, která je menší než vzdálenost těchto daných bodů.

Platí-li $E = [-e, 0]$, $F = [e, 0]$, tedy ohniska leží na ose o_x symetricky vzhledem k počátku souřadnic, platí pro každý bod X na elipse $||X - E| - |X - F|| = 2a$, tedy

$$\left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| = 2a$$

a po analogické úpravě jako v případě elipsy (při označení $b = \sqrt{e^2 - a^2}$) dostaneme

$$-b^2 x^2 + a^2 y^2 = -a^2 b^2 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}} \quad \text{(středová rovnice hyperboly).}$$

Přímky

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$

jsou asymptoty hyperboly se středem v bodě $S = [0, 0]$ („tečny v nekonečnu“).

Jestliže střed neleží v počátku souřadnic, ale v bodě $S = [m, n]$, bude mít rovnice tvar

$$\underline{\underline{\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,}}$$

event.

$$\underline{\underline{-\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}}$$

a po úpravě (a vhodném označení)

$$ax^2-by^2+cx+dy+e=0,$$

přičemž **koeficienty u x^2 a y^2 mají opačné znaménko**.

Má-li hyperbola střed $S=[m,n]$, mají její asymptoty rovnice

$$(y-n)=\pm\frac{b}{a}\cdot(x-m).$$

Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F (ohniska paraboly) a od dané přímky p (řídící přímky), která neprochází bodem F.

Umístíme-li řídící přímku a ohnisko paraboly v souřadném systému tak, že platí

$$x=-\frac{p}{2},\ p>0,\ \text{tj. } 2x+p=0,\ F=\left[\frac{p}{2};0\right],$$

má podle definice paraboly platit pro každý její bod $X=[x,y]$ vztah

$$\frac{|2x+0y+p|}{\sqrt{2^2+0^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{(2x+p)^2}{4}=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2\ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{y^2=2px}}$$

což je rovnice paraboly s vrcholem $V=[0,0]$, osou symetrie v ose o_x a otevřené doprava. Analogicky odvodíme rovnici paraboly se stejným vrcholem i osou, ale otevřené doleva ve tvaru $y^2=-2px$, event. rovnice parabol s vrcholem v počátku otevřené nahoru, resp. dolů, ve tvaru $x^2=2py$, resp. $x^2=-2py$.

V obecné poloze je rovnice kuželosečky rovnicí paraboly, jestliže v ní druhá mocnina některé proměnné nevystupuje, tedy tvaru

$$ax^2+cx+dy+e=0,\ \text{resp. } by^2+cx+dy+e=0.$$

Příklad 2.101. Najděte rovnici kružnice, která se dotýká obou souřadných os a prochází bodem $M=[2,4]$.

Řešení. Viz Obr. 2.27:

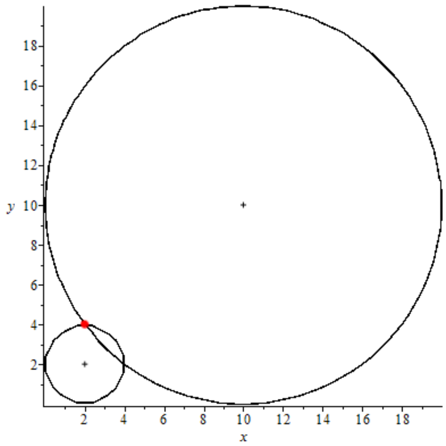
$$k:\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\ \text{podle zadání } M\in k,\quad a=b=r$$

$$(2-a)^2+(4-a)^2=a^2\quad\Leftrightarrow\quad a^2-12a+20=0=(a-10)(a-2)$$

$$\underline{\underline{(x-2)^2+(y-2)^2=4}}\quad\vee\quad\underline{\underline{(x-10)^2+(y-10)^2=100}}$$

□

Příklad 2.102. Najděte kružnici opsanou trojúhelníku o vrcholech $A=[1,-1]$, $B=$ $=[7,7]$, $C=[11,-1]$.



Obr. 2.27

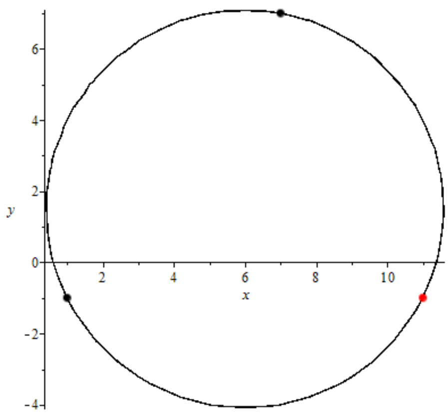
Řešení. Viz Obr. 2.28:

$$k: \quad x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$$

$$\left.\begin{array}{rr} A \in k: & 2 + b - c + d = 0 \\ B \in k: & 98 + 7b + 7c + d = 0 \\ C \in k: & 122 + 11b - c + d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} (r_3 - r_1) \\ (r_3 - r_2) \\ \Leftrightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{rl} 120 + 10b = 0 & b = -12 \\ 24 + 4b - 8c = 0 & c = -3 \\ & d = 7 \end{array}\right.$$

$$k: \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 - 12x - 3y + 7 = 0}}$$

□



Obr. 2.28

Příklad 2.103. Určete polohu bodů $A = [1, -3]$, $B = [1, 4]$, $C = [-3, 5]$ vzhledem k elipse $25x^2 + 9y^2 = 450$.

Řešení. Postupně prověříme jednotlivé body:

$$25x^2+9y^2\big|_{x=1,y=-3}=25+81=106<450 \quad\Rightarrow\quad A=[1,-3] \text{ je uvnitř elipsy}$$

$$25x^2+9y^2\big|_{x=1,y=4}=25+16\cdot 9=176<450 \quad\Rightarrow\quad B=[1,4] \text{ je uvnitř elipsy}$$

$$25x^2+9y^2\big|_{x=-3,y=5}=25\cdot 9+9\cdot 25=450 \quad\Rightarrow\quad C=[-3,5] \text{ leží na elipse}$$

□

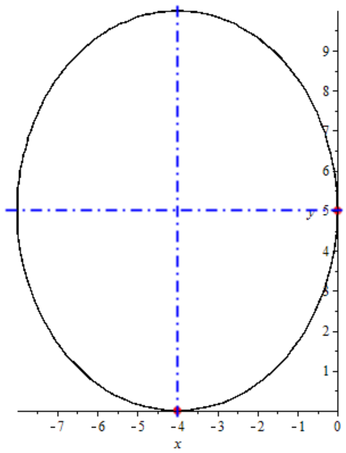
Příklad 2.104. Najděte rovnici elipsy s osami rovnoběžnými se souřadnými osami, jestliže se dotýká osy o_x v bodě $A=[-4,0]$ a osy o_y v bodě $B=[0,5]$.

Řešení. Viz Obr. 2.29:

$$S=[-4,5],\quad a=4,\ b=5$$

$$\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$$

□



Obr. 2.29

Příklad 2.105. Kuželosečka má rovnici

$$9x^2-4y^2-18x-8y-31=0.$$

Určete její druh, střed, délky poloos a rovnice asymptot.

Řešení. Viz Obr. 2.30:

$$9x^2-4y^2-18x-8y-31=0 \iff 9\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2+2y\right)-31=0 \iff$$

$$\iff 9\left((x-1)^2-1\right)-4\left((y+1)^2-1\right)=31 \iff 9(x-1)^2-4(y+1)^2=36 \iff$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{hyperbola:} \quad S = [1, -1]\,, \quad a = 2,\ b = 3$$

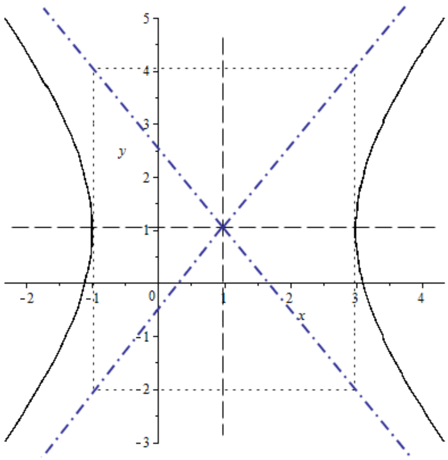
Asymptoty mají rovnice

$$y + 1 = \pm\frac{3}{2}\cdot(x-1)$$

neboli

$$3x - 2y - 5 = 0 \quad \text{a} \quad 3x + 2y - 1 = 0.$$

□



Obr. 2.30

Příklad 2.106. Najděte rovnici hyperboly, která prochází bodem $A = [-1, 5]$ a má vrcholy $V_1 = [0, 2]$, $V_2 = [8, 2]$.

Řešení. Viz Obr. 2.31:

$S = [4, 2], \quad a = 4,\ b = ?$

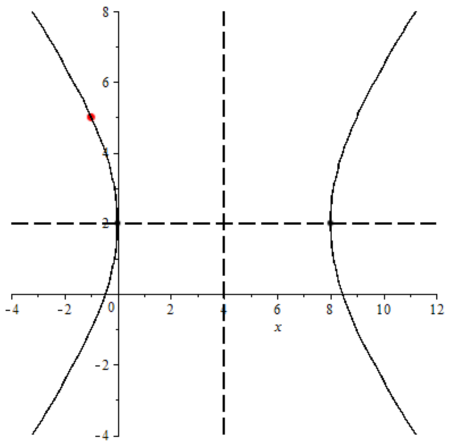
$$A \in \frac{(x-4)^2}{4^2} - \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{(-1-4)^2}{4^2} - \frac{(5-2)^2}{b^2} = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{25}{16} - \frac{9}{b^2} = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{9}{16} = \frac{9}{b^2}$$

$\Rightarrow\ \underline{b^2 = 16}$

Rovnice hyperboly: $\underline{\underline{\dfrac{(x-4)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1}}$

□

Příklad 2.107. Najděte rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a prochází body $A = [8, 3]$, $B = [-8, 3]$.



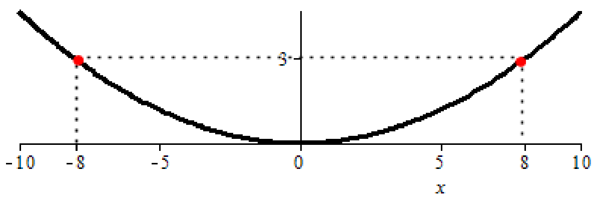
Obr. 2.31

Řešení. Viz Obr. 2.32:

$$\text{Rovnice paraboly:} \quad y = k \cdot x^2$$

$$[8,3] \in \left\{(x,y) \,\middle|\, y = k \cdot x^2\right\} \;\Rightarrow\; 3 = k \cdot 64 \;\Rightarrow\; k = \frac{3}{64} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{3x^2 - 64y = 0}}$$

□



Obr. 2.32

Příklad 2.108. Najděte rovnici paraboly, která má vrchol $V = [8,5]$, osa je rovnoběžná s osou o_x a má parametr $p = 4$.

Řešení. Viz Obr. 2.33:

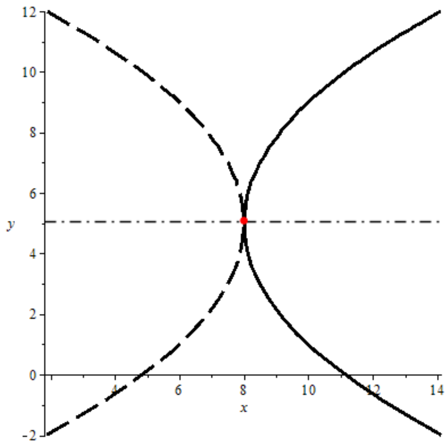
$$\text{Rovnice paraboly:} \quad (y-n)^2 = \pm 2p \cdot (x-n) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{(y-5)^2 = \pm 8(x-8)}}$$

□

Příklad 2.109. Najděte rovnici přímky procházející průsečíky paraboly $y^2 = 18x$ a kružnice $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$.

Řešení. Viz Obr. 2.34:

$$\left.\begin{aligned} &y^2 = 18x \\ &x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; x^2 + 18x + 12x - 64 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 30x - 64 = 0 \;\Leftrightarrow$$



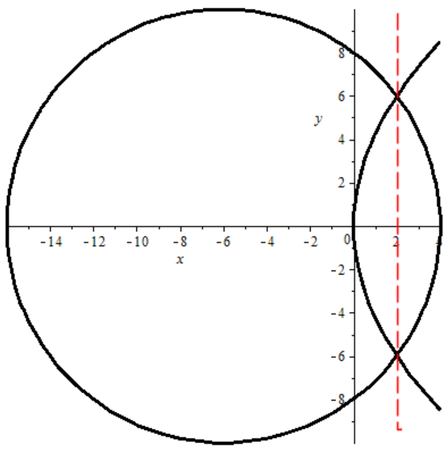
Obr. 2.33

$\Leftrightarrow \quad (x+32)(x-2)=0$

$x=-32$ nevyhovuje, $\quad x=2 \;\Rightarrow\; y^2=36 \;\Rightarrow\; y=\pm 6$

Hledaná přímka: $\quad \underline{\underline{x=2}}$

$\square$



Obr. 2.34

Příklad 2.110. Najděte průsečíky přímky $p: x+y-7=0$ a paraboly $y^2=2(x-3)$.

Řešení.

$$x+y-7=0 \quad \wedge \quad y^2=2(x-3)$$

$$x=7-y \;\Rightarrow\; y^2=2(7-y-3) \;\Rightarrow\; y^2+2y-8=0 \;\Rightarrow\; (y+4)(y-2)=0$$

$$y=2 \;\Rightarrow\; x=7-2=5$$

$y = -4 \;\Rightarrow\; x = 7 + 4 = 11$

Průsečíky: $\underline{\underline{[5, 2], \quad [11, -4]}}$

□

Cvičení

1) Najděte rovnici kružnice, jestliže

   a) $S = [7, -3]\,,\ r = 6.$ $\quad [x^2 + y^2 - 14x + 6y + 22 = 0]$

   b) $S = [4, -5]$ a kružnice prochází bodem $A = [6, -1]$.
   $[x^2 + y^2 - 8x + 10y + 21 = 0]$

   c) body $A = [5, 4]\,,\ B = [-1, -3]$ tvoří její průměr.
   $[x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0]$

   d) $S = [5, 4]$ a dotýká se přímky $5x - 12y - 24 = 0$.
   $\left[(x-5)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{47}{13}\right)^2\right]$

   e) prochází body $A = [3, -2]\,,\ B = [2, -9]\,,\ C = [9, -2]$.
   $[x^2 + y^2 - 12x + 12y + 47 = 0]$

2) Najděte rovnici kružnice, která

   a) se dotýká osy o_y v počátku souřadného systému a protíná osu o_x v bodě $A = [-8, 0]$.
   $[x^2 + y^2 + 8x = 0]$

   b) se dotýká osy o_x v počátku souřadného systému a protíná osu o_y v bodě $A = [0, 6]$.
   $[x^2 + y^2 - 6y = 0]$

   c) prochází body $A = [-1, -3]\,,\ B = [3, 5]$ a její střed leží na ose o_x.
   $[x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0]$

d) prochází body $A = [2, 5]$, $B = [3, 2]$ a její střed leží na ose o_y.

$$[9x^2 + 9y^2 - 48y - 21 = 0]$$

3) Strany trojúhelníku mají rovnice $x + 7y - 56 = 0$, $x - 3y + 14 = 0$, $2x - y + 8 = 0$. Najděte rovnici kružnice opsané tomuto trojúhelníku.

$$[x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0]$$

4) Najděte rovnici přímky procházející průsečíky kružnic $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$ a $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$.

$$[5x - 3y - 13 = 0]$$

5) Najděte vzdálenost středů kružnic $x^2+y^2-2x+2y-23 = 0$, $x^2+y^2-6x-12y-35 = 0$ od přímky procházející jejich průsečíky.

$$\left[\tfrac{\sqrt{53}}{53}, \tfrac{2862}{53}\right]$$

6) Ověřte, že následující kuželosečky jsou elipsy a určete jejich střed a délku poloos:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$ $\quad [S = [0, 0],\ a = 2, b = 1]$

b) $2x^2 + 9y^2 = 1$ $\quad \left[S = [0, 0],\ a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{1}{3}\right]$

c) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ $\quad [S = [0, 0],\ a = 2, b = \sqrt{3}]$

d) $25x^2 + 100x + 16y^2 - 300 = 0$ $\quad [S = [-2, 0],\ a = 4, b = 5]$

e) $x^2 + 16y^2 - 16x - 32y + 64 = 0$ $\quad [S = [8, 1],\ a = 4, b = 1]$

7) Ověřte, že následující kuželosečky jsou hyperboly a určete jejich střed, délku poloos, vrcholy a rovnice asymptot:

a) $9x^2 - 4y^2 = 121$

$$\left[S = [0, 0],\ a = \tfrac{11}{3},\ b = \tfrac{11}{2},\ V_{1,2} = \left[\pm\tfrac{11}{3}, 0\right],\ y = \pm\tfrac{3}{2}x\right]$$

b) $2x^2 - 3y^2 = 24$

$$\left[S = [0, 0],\ a = 2\sqrt{3},\ b = \sqrt{6},\ V_{1,2} = \left[\pm 2\sqrt{3}, 0\right],\ y = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right]$$

c) $x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0$

$[S = [-2, 0]\,,\ a = 3,\ b = 1,\ V_1 = [-5, 0]\,, V_2 = [1, 0]\,,\ x \pm 3y + 2 = 0]$

d) $9x^2 - 25y^2 - 50y - 250 = 0$

$[S = [0, -1,]\,,\ a = 5,\ b = 3,\ V_{1,2} = [\pm 5, -1]\,,\ 5y \pm 3x + 5 = 0]$

e) $x^2 - y^2 - 16x - 14y + 1 = 0$

$[S = [8, 7]\,,\ a = b = 4,\ V_1 = [8, 11]\,,\ V_2 = [8, 3]\,,\ x - y - 15 = 0,\ x + y - 1 = 0]$

8) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, prochází

a) bodem $A = [3, 9]$ a je symetrická podle osy o_x. $[y^2 = 27x]$

b) bodem $A = [-3, -5]$ a je symetrická podle osy o_y. $\left[x^2 = -\frac{9}{5}y\right]$

c) body $A = [8, 3]$ a $B = [8, -3]$. $\left[y^2 = \frac{9}{8}x\right]$

d) body $A = [4, 1]$ a $B = [-4, 1]$. $[x^2 = 16y]$

e) body $A = [-5, 2]$ a $B = [-5, -2]$. $\left[y^2 = -\frac{4}{5}x\right]$

f) body $A = [2, -3]$ a $B = [-2, -3]$. $\left[x^2 = -\frac{4}{3}y\right]$

9) Napište rovnici paraboly, která

a) má vrchol v bodě $V = [-1, -1]$, prochází bodem $A = [3, 2]$ a její osa je rovnoběžná s osou o_x.

$\left[(y + 1)^2 = \frac{9}{2}(x - 1)\right]$

b) má vrchol v bodě $V = [-3, -2]$, prochází bodem $A = [2, 3]$ a její osa je rovnoběžná s osou o_y.

$\left[(x - 5)^2 = 10\left(y + \frac{3}{2}\right)\right]$

c) má vrchol v bodě $V = [-10, 0]$, je symetrická podle osy o_x a vytíná na ose o_y úsečku délky 18.

$\left[y^2 = \frac{81}{10}(x + 10)\right]$

10) Určete druh kuželosečky

a) $4x^2 + 4y^2 = 16$ [kružnice]

b) $6x^2 + 36y^2 = 36$ [elipsa]

c) $4x^2 - 2y^2 = 2$ [hyperbola]

d) $y^2 - 2x + 5 = 0$ [parabola]

e) $x^2 - 3y^2 - 4x = 0$ [hyperbola]

f) $9x^2 - 16y^2 = 144$ [hyperbola]

g) $4x^2 - 2y = 0$ [parabola]

2.6 Komplexní čísla

Komplexní čísla byla zavedena (mimo jiné), aby každá algebraická rovnice měla nějaké řešení (základní věta algebry říká, že algebraická rovnice $P_n(x) = 0$, kde $P_n(x)$ je libovolný polynom n-tého stupně, má právě n ne nutně různých řešení), což ovšem, jak víme, neplatí, omezíme-li se na obor reálných čísel $\mathbb{R}$, např. rovnice $x^2 + 1 = 0$ reálné řešení nemá. Podívejme se na jinou situaci.

Cardanův vzorec pro řešení rovnice $x^3 = ax + b$, který má tvar

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}},$$

má v reálném oboru smysl pouze pro

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0.$$

Uvažujme rovnici $x^3 = 15x + 4$, která má zřejmě řešení $x = 4$, neboť $4^3 = 15 \cdot 4 + 4 = 16 \cdot 4$. Cardanův vzorec pro tuto rovnici v $\mathbb{R}$ použít nelze, dostáváme zde druhou odmocninu ze záporného čísla:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = (*) \end{aligned}$$

Jestliže připustíme možnost počítat se symbolem $\sqrt{-1}$, a protože

$$\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 \pm 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 \pm \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \mp \sqrt{-1} = 2 \pm 11\sqrt{-1},$$

tedy

$$\sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}} = 2 \pm \sqrt{-1},$$

dostaneme

$$(*) = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = \underline{\underline{4}},$$

což je naše (předem uhodnuté) řešení.

Definujeme tedy ***imaginární jednotku*** i jako číslo, jehož druhá mocninou je -1, tedy

$$\underline{\underline{i := \sqrt{-1}}} \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1 \quad \big(\vee(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1\big)\,.$$

Poznamenejme, že někdy se imaginární jednotka značí písmenem j (pro odlišení od okamžité hodnoty proudu).

Komplexním číslem pak rozumíme výraz

$$z = x + y \cdot i, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Další pojmy související s komplexními čísly, vlastnosti a operace viz kapitola 1.5. Poznamenejme, že na rozdíl od reálných čísel nemůžeme komplexní čísla porovnávat podle velikosti:

$$i > 0 \quad |\cdot i \;\Rightarrow\; i^2 = -1 > 0 \quad \text{spor}$$

$$i < 0 \quad |\cdot i \;\Rightarrow\; i^2 = -1 > 0 \quad \text{spor}$$

Množinu komplexních čísel nelze uspořádat.

Příklad 2.111. Pro $a = 2\sqrt{3} - 2i$, $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ vyjádřete výrazy $a + b$, $b - a$, $a \cdot b$, $\frac{b}{a}$, a^2, $-a$, $\bar{a}$ v algebraickém tvaru.

Řešení.

$$a + b = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \left(-2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) i = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{-4 + \sqrt{3}}{2} i}}$$

$$b - a = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right) i = \underline{\underline{-\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2} + \frac{4 + \sqrt{3}}{2} i}}$$

$$a \cdot b = (2\sqrt{3} - 2i) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -\sqrt{3} + \sqrt{3} + (1 + 3)i = \underline{\underline{4i}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{2\sqrt{3} - 2i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3} + (3 - 1)i}{4} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{-\sqrt{3} + i}{8}}}$$

$$a^2 = (2\sqrt{3} - 2i)^2 = 4(\sqrt{3} - i)^2 = 4(3 - 2\sqrt{3}i - 1) = \underline{\underline{8(1 - \sqrt{3}i)}}$$

$$\bar{a} = \underline{\underline{2\sqrt{3} + 2i}}$$

□

Příklad 2.112. Najděte algebraický tvar komplexních čísel

$$\text{a) } \frac{2+i}{1-i}, \qquad \text{b) } (-i)^{27}, \qquad \text{c) } \frac{i^{10} - i^{12} - 4i^{15}}{i^5 - i^3}.$$

Řešení. Postupně vyřešíme:

a)

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+i+2i-1}{2} = \underline{\underline{\frac{1+3i}{2}}}$$

b)

$$(-i)^{27} = (-1)^{27} \cdot i^{24} \cdot i^3 = -1 \cdot \left(i^4\right)^6 \cdot (-i) = \underline{\underline{i}}$$

c)

$$\frac{i^{10} - i^{12} - 4i^{15}}{i^5 - i^3} = \frac{i^{10}\left(1 - i^2 + 4i \cdot i^4\right)}{i^3\left(i^2 - 1\right)} = i^7 \cdot \frac{2+4i}{-2} = -i \cdot (-1 + 2i) = \underline{\underline{-2 + i}}$$

□

Příklad 2.113. Vypočítejte

$$\left| \frac{-2-3i}{3-2i} \right|.$$

Řešení.

$$\left| \frac{-2-3i}{3-2i} \right| = \frac{|-2-3i|}{|3-2i|} = \frac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{9+4}} = \underline{\underline{1}}$$

□

Příklad 2.114. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2.$$

Řešení.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} - \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{0}} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$$

□

Příklad 2.115. Najděte goniometrický (a exponenciální) tvar komplexních čísel

$$\text{a) } a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \text{b) } b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad \text{c) } c=\frac{3-i}{1+3i},$$

a znázorněte je v Gaussově komplexní rovině. Dále najděte goniometrický a exponenciální tvar čísel

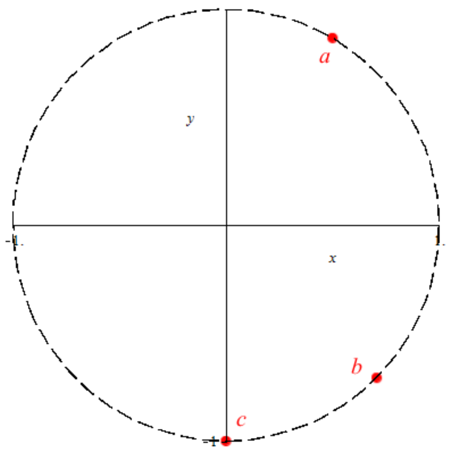
$$a\cdot b, \quad \frac{a}{b}, \quad a\cdot b\cdot c, \quad b^4.$$

Řešení. Viz Obr. 2.35:

$$a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\underline{\underline{\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\underline{\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)}}=\mathrm{e}^{i\cdot\frac{7}{4}\pi}$$

$$c=\frac{3-i}{1+3i}=\frac{(3-i)(1-3i)}{10}=\frac{3-i-9i-3}{10}=\frac{-10i}{10}=-i=\underline{\underline{\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}}}=\mathrm{e}^{i\cdot\frac{3}{2}\pi}$$



Obr. 2.35

$$a\cdot b=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\underline{\underline{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}}$$

$$a\cdot b=\mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\pi}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{a}{b}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$= \underline{\underline{\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}}}$$

$$\frac{a}{b} = \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{3}} : \mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{-\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\pi} = \mathrm{e}^{i\cdot\frac{7}{12}\pi}$$

$$a\cdot b\cdot c = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi}}$$

$$a\cdot b\cdot c = \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\pi} = \mathrm{e}^{i\cdot\frac{19}{12}\pi}$$

$$b^4 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 4\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 4\right) = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = \underline{\underline{\cos\pi + i\sin\pi}}$$

$$b^4 = \left(\mathrm{e}^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 = \mathrm{e}^{-i\cdot\pi}$$

□

Příklad 2.116. Najděte algebraický tvar komplexních čísel

$$\text{a) } 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \qquad \text{b) } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100}.$$

Řešení. Postupně vyřešíme:

a)

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\sqrt{3} + i}}$$

b)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{100} = \cos\left(-\frac{100}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{100}{6}\pi\right) =$$

$$= \left|\frac{100}{6}\pi = \frac{50}{3}\pi = \frac{48}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right| = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi - 16\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi - 16\pi\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

□

Příklad 2.117. Pro $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ vypočítejte:

$$\text{a) } z_1 \cdot z_2, \qquad \text{b) } \frac{z_1}{z_2}.$$

Řešení. Postupně vyřešíme:

a)

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{6}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

b)

$$\frac{z_1}{z_2} = 18\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 18\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

□

Příklad 2.118. V oboru komplexních čísel vyřešte následující rovnice:

$$\text{a) } z^4 = 1, \qquad \text{b) } z^3 - 8i = 0.$$

Řešení. Postupně vyřešíme:

a)

$$z^4 = 1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \;\Rightarrow\; z = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right), \; k = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ k = 1: &\quad z_1 = \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2} = i \\ k = 2: &\quad z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ k = 3: &\quad z_3 = \cos\tfrac{3}{2}\pi + i\sin\tfrac{3}{2}\pi = -i \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{z = \pm 1 \;\vee\; z = \pm i}}$$

b)

$$z^3 - 8\,i = 0 \;\Leftrightarrow\; z^3 = 8i = 8 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$$

$$z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \; k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2 \cdot -i = -2i$$

$$\underline{\underline{z = -2i \ \vee \ z = \pm\sqrt{3} + i}}$$

$\square$

Příklad 2.119. V Gaussově komplexní rovině znázorněte množinu čísel, pro která platí:

a) $|z - i| = 3$, b) $|z - 2 + 3i| < 2$, c) $|z + 2| \geq 1$.

Řešení. Postupně vyřešíme (viz Obr. 2.36):

a)

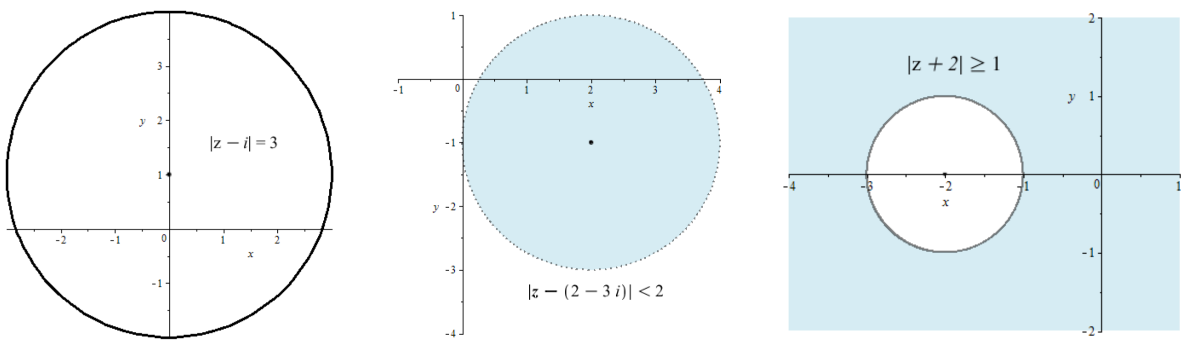
$$|z - i| = 3 \ \Leftrightarrow \ |x + iy - i| = 3 \ \Leftrightarrow \ |x + i(y - 1)| = 3 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 3 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \underline{\underline{x^2 + (y-1)^2 = 9}}$$

b)

$$|z - 2 + 3i| < 2 \ \Leftrightarrow \ |x - 2 + (y + 3)i| < 2 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} < 2 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \underline{\underline{(x-2)^2 + (y+1)^2 < 4}}$$

c)

$$|z + 2| \geq 1 \ \Leftrightarrow \ |x + 2 + iy| \geq 1 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \geq 1 \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{(x+2)^2 + y^2 \geq 1}}$$



a) b) c)

Obr. 2.36

$\square$

Cvičení

1) Najděte algebraický tvar komplexních čísel

a) $(1+i)\cdot i$ $[i-1]$

b) $(-i)^{27}$ $[i]$

c) i^{2009} $[i]$

d) $i+i^3+i^5+i^7+i^9$ $[i]$

e) $5-8i+6i^2-3i^3+6i^4$ $[5-5i]$

2) Vypočítejte:

a) $|3-4i|$ $[5]$

b) $\left|\frac{i^{10}-i}{1+2i}\right|$ $\left[\frac{\sqrt{10}}{5}\right]$

3) Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z=\frac{9i^9-7i^7-5i^5-3i^3+i}{25i^3}.$$

$[-1]$

4) Najděte goniometrický a exponenciální tvar komplexních čísel

a) -2 $[2(\cos\pi+i\sin\pi)=2\mathrm{e}^{i\pi}]$

b) $5i$ $\left[5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=5\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

c) $1-i$ $\left[\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}\right]$

d) $\frac{2-i}{3i-1}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{5}{4}\pi}\right]$

5) Pro $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ vypočítejte:

a) $z_1\cdot z_2$ $\left[12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$

b) $\frac{z_1}{z_2}$ $\left[3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]$

6) V oboru komplexních čísel řešte rovnice:

a) $z^4+1=0$ $\left[z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$

b) $z^3=\frac{1}{8}$ $\left[z=\frac{1}{2}\ \vee\ z=-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

c) $z^6=-64$ $\left[z=\pm 2i\ \vee\ z=\pm\sqrt{3}\pm i\right]$