FAKULTA ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ ústav matematiky

MATEMATIKA 1

Sbírka úloh

Edita Kolářová

Úvod

Dostali jste do rukou sbírku příkladů k přednášce Matematika 1. Tato sbírka je doplněním textu **Fuchs, Krupkova: Matematika 1**. Navazuje na teoretický výklad látky z této knihy a doplňuje příklady k procvičení. Je zde řada příkladů řešených detailně, u dalších jsou uvedené výsledky, případně rady a návody. Zároveň jsem se ale snažila uvést do této sbírky všechny důležité vzorce, které při řešení příkladů využívám, abyste po prostudování příslušných kapitol z knihy Matematika 1 mohli sbírku používat i samostatně.

Kapitoly jsou navrženy tak, aby obsahovaly látku, která spolu úzce souvisí, a je možné je pochopit a nastudovat najednou jako celek.

K zvládnutí Matematiky 1 budete potřebovat znalosti ze středoškolské matematiky. Tato sbírka byla napsaná právě pro studenty, kteří mají slabší základy ze střední školy a proto nestačí rychlému tempu v jakém probíhá výuka matematiky na naší fakultě. Příklady obsažené v této sbírce jsou od nejjednodušších až po složitější, aby umožnily samostatné procvičení probíraných témat. Pro doplnění středoškolské matematiky doporučuji elektronické texty **Kolářová: Matematický seminář** přístupné v IS.

Chtěla bych poděkovat svému kolegovi RNDr. Petru Fuchsovi Ph.D. za jeho rady a podporu při psaní této sbírky.

Edita Kolářová Brno, 2010

Obsah

1 Maticový počet **3**
1.1 Počítání s maticemi . . . 3
1.2 Ekvivalentní úpravy matic, hodnost matice . . . 8
1.3 Determinanty a inverzní matice . . . 10
1.4 Soustavy lineárních rovnic . . . 15

2 Diferenciální počet funkce jedné proměnné **23**
2.1 Definiční obory funkcí . . . 23
2.2 Některé vlastnosti funkcí, inverzní funkce . . . 27
2.3 Limita funkce . . . 30
2.4 Derivace funkce . . . 34
2.5 L´Hospitalovo pravidlo . . . 39

3 Integrální počet funkce jedné proměnné **44**
3.1 Integrační metody . . . 44
3.2 Integrování racionální lomené funkce . . . 50
3.3 Určitý integrál . . . 55
3.4 Nevlastní integrál . . . 58

4 Řady **62**
4.1 Nekonečná geometrická řada . . . 62
4.2 Konvergence číselné řady . . . 64
4.3 Mocninné řady . . . 68

LINEÁRNÍ ALGEBRA

1 Maticový počet

1.1 Počítání s maticemi

Matice A typu $m \times n$ — soubor $m \times n$ čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prvek a_{ij} — prvek matice **A**, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci.

Prvek a_{ii} — diagonální prvek, nachází se v i-tém řádku a i-tém sloupci matice **A**.

Čtvercová matice — matice, která má stejný počet řádků jako sloupců.

Některé čtvercové matice mají speciální tvar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad - \quad \textbf{diagonální matice}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad - \quad \textbf{horní trojúhelníková matice}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad - \quad \textbf{jednotková matice}$$

K matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $m \times n$ definujeme tzv. transponovanou matici $\mathbf{A}^T = \mathbf{B}$ typu $n \times m$, kde $b_{ij} = a_{ji},\ i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m$.

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $m \times n$ můžeme vynásobit číslem $\alpha \in \mathbb{R}$. Dostaneme znovu matici typu $m \times n$: $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$, kde $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij},\ i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n$.

Dvě matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})_m^n$ stejného typu $m \times n$ můžeme sečíst. Výsledná matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ bude znovu maticí typu $m\times n$ a $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij},\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$.

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^p$ typu $m \times p$ můžeme vynásobit maticí $\mathbf{B} = (b_{ij})_p^n$ typu $p \times n$. Výsledná matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bude maticí typu $m \times n$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.,\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Prvek c_{ij} dostaneme jako skalární součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbf{B}$.

Příklad 1.1.1. *Vypočítejte matici* $\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{H} = 3 \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{B}$, *kde*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix};$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & -2 \\ 6 & 7 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$

Řešení:

a) Matice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jsou typu 2×3 a proto je můžeme sečíst.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0+4 & -2-2 & 3+2 \\ -4-7 & -1+2 & 0+0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -11 & 1 & 0 \end{pmatrix}}},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 9 \\ -12 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 \\ -\frac{17}{2} & -4 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

b) Matice $\mathbf{A}$ je typu 3×5 a $\mathbf{B}$ je matice typu 4×5, tehdy se nedají sečíst a proto $\underline{\underline{\text{neexistuje}}}$ matice $\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ani $\mathbf{H} = 3 \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{B}$.

Příklad 1.1.2. *Vypočítejte matice* $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ *a* $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$, *kde*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

Řešení: a) Matice $\mathbf{A}$ je čtvercová a proto $\mathbf{A}$ i matice $\mathbf{A}^T$ jsou stejného typu a tak je můžeme sečíst i odečíst.

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}+\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 10 & -5 & 7 \\ -5 & 10 & 1 \\ 7 & 1 & -10 \end{pmatrix}}};$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}-\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

b) Matice $\mathbf{A}$ je typu 2×3, potom $\mathbf{A}^T$ je matice typu 3×2, tehdy se nedají sečíst a proto $\underline{\underline{\text{neexistuje}}}$ matice $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ ani $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$.

Poznámka. Matice $\mathbf{M} = \mathbf{A}+\mathbf{A}^T$, pokud existuje, je takzvaná symetrická matice ($\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$) a podobně $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ je antisymetrická matice ($\mathbf{N} = -\mathbf{N}^T$).

Příklad 1.1.3. *Vypočítejte matici* $\mathbf{X} = 3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}$, *kde*

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a)

$$\mathbf{X} = 3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 9 & 14 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{pmatrix}}}.$$

b)

$$\mathbf{X} = 3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.1.4. *Vypočítejte matici* $\mathbf{X} = \mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, *kde*

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a) $\mathbf{X}$ je nulová matice.

b) $\mathbf{X}$ je jednotková matice typu 2×2.

Příklad 1.1.5. *Vypočítejte matici* $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, *kde*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

a) Matice $\mathbf{A}$ je typu typu 2×3 a $\mathbf{B}$ je typu typu 3×3 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, která bude typu 2×3.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & -1 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & 8 \end{pmatrix}}}.$$

b) Matice $\mathbf{A}$ je typu typu 3×3 a $\mathbf{B}$ je typu typu 3×4 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} * \mathbf{B}$, která bude typu 3×4.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 33 & -8 & 13 & 38 \\ 4 & -4 & 14 & -6 \\ -31 & 16 & -19 & -20 \end{pmatrix}}}.$$

c) Matice $\mathbf{A}$ je typu 3×5 a $\mathbf{B}$ je matice typu 4×3, tzn. počet sloupců matice $\mathbf{A}$ se nerovná počtů řádků matice $\mathbf{B}$, tehdy se $\underline{\underline{\text{nedá vypočítat } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}}$. V tomto případě by bylo možné vypočítat součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ a byla by to matice typu 4×5.

Příklad 1.1.6. *Vypočítejte matice* $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, *kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matice $\mathbf{A}$ je typu typu 2×3, $\mathbf{B}$ je typu typu 3×2 a proto existuje matice $\mathbf{X}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, která bude typu 2×2 a také matice $\mathbf{Y}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, která bude typu 3×3.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -21 & 20 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}}}.$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -9 & 8 & 11 \\ 16 & -22 & -4 \\ 4 & -9 & 6 \end{pmatrix}}}.$$

Poznámka. Násobení matic není komutatívní operace – obecně $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Příklad 1.1.7. *Vypočítejte matice* $\mathbf{X}=\mathbf{A}^2$ *a* $\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, *kde* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Matice $\mathbf{X}$ a i matice $\mathbf{Y}$ existují a budou to matice typu 2×2.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 37 & 18 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}}}.$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 34 & 23 \\ 23 & 17 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.1.8. *Vypočítejte matice* $\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$ *a* $\mathbf{Y}=\mathbf{A}^2+2\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}^2$, *kde*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Potom

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}}}.$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 2\cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -7 & 15 \end{pmatrix} + 2\cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2+7 & 7+16-6 \\ -7+18-4 & 15-14+7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.1.9. *Vypočítejte matici* $\mathbf{X}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, *kde*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{X}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ je $\underline{\underline{\text{nulová matice}}}$ typu 3×2.

1.2 Ekvivalentní úpravy matic, hodnost matice

Ekvivalentní úprava nebo také elementární transformace matice — jedna z následujících tři úprav:

1. záměna dvou řádků (sloupců) matice,
2. vynásobení jednoho řádku (sloupce) nenulovým číslem,
3. připočtení jednoho řádku (sloupce) jinému.

Ekvivalentní matice — dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu, kde matice $\mathbf{A}$ se dá upravit pomocí elementárních transformací na matici $\mathbf{B}$. Píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Hodnost matice — počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) v matici. Značíme $hod(\mathbf{A})$.

Poznámka. Pokud platí, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, potom $hod(\mathbf{A}) = hod(\mathbf{B})$. Z toho plyne velice jednoduchá metoda na počítání hodnosti matic. Když chceme počítat $hod(\mathbf{A})$, tak tuto matici pomocí řádkových ekvivalentních úprav upravíme na trojúhelníkovou matici $\mathbf{B}$. Je jasné, že počet lineárně nezávislých řádků v matici $\mathbf{B}$ se rovná počtu nenulových řádků této matice. Tím získáme i $hod(\mathbf{A})$.

Poznámka. Platí, že $hod(\mathbf{A}) = hod(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$. Znamená to, že je jedno, jestli při počítání hodnosti používáme ekvivalentní řádkové úpravy, anebo sloupcové úpravy.

Příklad 1.2.1. *Vypočítejte hodnosti následujících matic:*

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ \text{b)}\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ \text{c)}\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a) Upravovat začínáme v levým horním rohu matice $\mathbf{A}$. Budeme provádět následující ekvivalentní řádkové úpravy:

1. Zaměníme první a druhý řádek v matici $\mathbf{A}$. Tím získáme jedničku v levým horním rohu.

2. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku. Jinými slovy k druhému řádku přičteme -2 násobek prvního řádku.

3. Po předchozí úpravě je první řádek a první sloupec podle naších představ. Při další úpravě postupujeme, jako kdyby jsme chtěli upravit na trojúhelníkový tvar matici typu 2×2, která by vznikla vynecháním prvního řádku a prvního sloupce. Táto submatice už má v levým horním rohu jedničku. Jako poslední úpravu třikrát druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme trojúhelníkovou matici. Spočítame nenulové řádky: $\underline{\underline{hod(\mathbf{A}) = 3.}}$

b) 1. V matici **B** trojnásobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a zároveň dvojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Druhý řádek vydělíme 13 a zároveň třetí řádek vydělíme -6.

3. Druhý řádek odečteme od třetího řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 13 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{hod(\mathbf{B}) = 2.}}$$

c) 1. V matici **C** nejdříve dvojnásobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a zároveň sedmnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Zaměníme druhý a třetí řádek.

3. Dvojnásobek druhého řádku přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{hod(\mathbf{C}) = 2.}}$$

Příklad 1.2.2. *Zjistěte hodnost matice* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix}$ *v závislosti na parametru p.*

Řešení: 1. V matici **A** přičteme první řádek druhému řádku a zároveň dvojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Druhý řádek vydělíme pěti.

3. Trojnásobek druhého řádku přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & p-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & p-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p-3 \end{pmatrix}$$

Pokud $p - 3 = 0$ ($p = 3$) matice má dvě nenulové řádky, jinak má matice nenulové řádky tři. Z toho plyne, že pokud $\underline{\underline{p = 3 \;\Rightarrow\; hod(\mathbf{C}) = 2}}$ a v případě, kdy $\underline{\underline{p \neq 3 \;\Rightarrow\; hod(\mathbf{C}) = 3.}}$

Příklad 1.2.3. *Vypočítejte hodnosti následujících matic:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -10 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení: a) $hod(\mathbf{A}) = 2$; b) $hod(\mathbf{B}) = 2$; c) $hod(\mathbf{C}) = 3$.

1.3 Determinanty a inverzní matice

Determinant — reálné číslo, které můžeme k dané čtvercové matici jednoznačně určit následujícím způsobem:

1. pro matici $A = (a_{11})$ typu 1×1 je $det(A) = a_{11}$,

2. pro matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ typu 2×2 je $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

3. pro matici A typu 3×3 je $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$.

V tomto případě první dva řádky matice napíšeme pod danou matici typu 3×3 a počítáme součiny zleva shora dolu po diagonále s plusem a zprava shora po opačné diagonále s mínusem.

4. pro obecnou čtvercovou matici A typu $m \times m$ determinant počítáme rozvojem podle řádku (sloupce)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{k1}(-1)^{k+1}M_{k1} + a_{k2}(-1)^{k+2}M_{k2} + \cdots + a_{km}(-1)^{k+m}M_{km}$$

kde M_{kj} označuje determinant submatice typu $(m-1) \times (m-1)$, která vznikne z původní matice vynecháním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Regulární matice — čtvercová matice, která má nenulový determinant.

Inverzní matice k matici A — matice $\mathbf{B}$, pro kterou platí, že $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

Značíme $\mathbf{A}^{-1}$.

Poznámka. Pokud $\mathbf{A}$ není regulární, neexistuje k ní inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$.

Při hledání inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ postupujeme tak, že nejdříve k matici $\mathbf{A}$ typu $m \times m$ připíšeme jednotkovou matici stejného typu. Dostaneme novou matici typu $m \times 2m$, kterou pomocí elementárních transformací upravujeme tak dlouho, dokud nevznikne jednotková matice vlevo. Potom z pravé části jednoduše opíšeme matici $\mathbf{A}^{-1}$. Postup ilustruje následující schéma:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{E}) \sim \cdots \sim (\mathbf{E} \,|\, \mathbf{A}^{-1})$$

Příklad 1.3.1. *Vypočítejte determinanty následujících matic typu* 2×2*:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$

Řešení: a) $det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) = 3 - 2 = \underline{\underline{1.}}$

b) $det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a \cdot a - b \cdot (-b) = \underline{\underline{a^2 + b^2.}}$

c) $det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = \underline{\underline{-1.}}$

Příklad 1.3.2. *Vypočítejte determinanty následujících matic typu* 3×3*:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení: a) $det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{matrix}$$

$= \Big(1 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2\Big) - \Big((-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 +$ $(-1) \cdot 3 \cdot (-1)\Big) = \Big(2 + 1 + 12\Big) - \Big(4 + 2 + 3\Big) = 15 - 9 = \underline{\underline{6.}}$

b) $det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \Big(1 \cdot b \cdot b + 1 \cdot a \cdot b + 1 \cdot a \cdot a\Big) - \Big(b \cdot b \cdot 1 + a \cdot a \cdot 1 + b \cdot a \cdot 1\Big) =$

$$= b^2 + ab + a^2 - b^2 - a^2 - ab = \underline{\underline{0.}}$$

Poznámka. Matice **B** má dva lineárně závislé řádky (první řádek je stejný jako třetí) a proto $det(\mathbf{B}) = 0$.

c) $det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 1 + 12 - (4 + 8 + 9) = 37 - 21 = \underline{\underline{16.}}$

Příklad 1.3.3. *Vypočítejte determinanty následujících matic typu* 4×4*:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 29 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & b & 1 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}$

Řešení: a) Je to matice typu 4×4, proto determinant musíme počítat rozvojem. Vybereme si řádek nebo sloupec, kde je nejvíce nul. V tomto případě jednoznačně nejvhodnější bude třetí řádek, kde jsou až 3 nuly. Jediné nenulové číslo v tomto řádku je 5, která je v třetím řádku a třetím sloupci.

$$det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 29 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} == 0 + 0 + 5\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot \Big(-6 - 2 + 0 + 1 + 12 + 0 \Big) = 5 \cdot 5 = \underline{\underline{25.}}$$

b) V tomto případě nejvhodnější bude počítat rozvoj podle třetího sloupce.

$$det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & b & 1 \end{vmatrix} = a\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 +$$

$$+ b\,(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a \cdot 17 - b \cdot (-9) = \underline{\underline{17a + 9b.}}$$

c) Rozvineme determinant podle prvního sloupce.

$$det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & a & b \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \underline{\underline{ac - b^2.}}$$

Příklad 1.3.4. *Vypočítejte determinanty následujících matic :*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 10 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: a) 10; b) 1; c) a^3; d)-310; e) -19.

Příklad 1.3.5. *Vypočítejte inverzní matici k matici:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Řešení: a) Matice $\mathbf{A}$ je regulární, $det(\mathbf{A}) = 4-2 = 2 \neq 0$, proto existuje $\mathbf{A}^{-1}$. Při počítání inverzní matice použijeme postup, který jsme popsali v úvodu této kapitoly. Matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E})$ typu 2×4 začneme upravovat z levého horního rohu směrem dolu, stejně jako při počítání hodnosti.

1. Přehodíme řádky.

2. První řádek vydělíme -2, druhý řádek -1.

3. Pokračujeme z pravého dolního rohu matice $\mathbf{A}$ směrem nahoru. Dvojnásobek druhého řádku odečteme od prvního řádku.

4. Z pravé části si opíšeme inverzní matici.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

b) $det(\mathbf{B}) = 4 - 12 = -8 \neq 0 \;\Rightarrow$ existuje $\mathbf{B}^{-1}$.

1. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku.

2. Druhý řádek vydělíme -4, první řádek 2.

3. Tři poloviny krát druhý řádek odečteme od prvního řádku.

4. Z pravé části si opíšeme inverzní matici.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}}.$$

c) $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.3.6. *Vyřešte maticovou rovnici $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ pro neznámou matici $\boldsymbol{X}$, kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $det(\mathbf{A}) = 7 - 6 = 1 \neq 0$, potom $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.3.7. *Vypočítejte inverzní matici k matici:*

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: a) $det(\mathbf{A}) = 1 \;\Rightarrow$ existuje $\mathbf{A}^{-1}$. Matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E})$ typu 3×6 začneme upravovat z levého horního rohu směrem dolu.

1. První řádek přičteme k druhému a třetí řádek vydělíme -1.

2. Druhý řádek vydělíme -1.

3. Pokračujeme z pravého dolního rohu matice $\mathbf{A}$ směrem nahoru. Dvojnásobek třetího řádku přičteme k druhému řádku.

4. Druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

b) $det(\mathbf{B}) = 0$ a proto $\underline{\underline{\text{neexistuje } \mathbf{B}^{-1}}}$.

c) $det(\mathbf{C}) = 4 \;\Rightarrow$ existuje $\mathbf{C}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

1.4 Soustavy lineárních rovnic

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má tvar:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matice soustavy — koeficienty z lineární soustavy zapsané do matice typu $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektor neznámých — sloupcový n rozměrný vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vektor pravých stran — sloupcový m rozměrný vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Rozšířená matice soustavy — matice typu $m \times (n+1)$, složená z matice soustavy s přidaným sloupcem pravých stran

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Maticový zápis soustavy — zápis soustavy jako součin matic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Homogenní soustava — soustava, kde vektor pravých stran je nulový vektor.

Čtvercová soustava — soustava, kde matice soustavy $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Jedná se o soustavu n lineárních rovnic o n neznámých.

Frobeniova věta. Uvažujme soustava m lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Jestliže $hod(\mathbf{A}) = hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = k$, potom soustava má řešení.
  - V případě $k = n$ má soustava právě jedno řešení.
  - V případě $k < n$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která mohou být zapsána pomocí $n - k$ parametrů.
- Jestliže $hod(\mathbf{A}) \neq hod(\widetilde{\mathbf{A}})$, potom soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešeni.

Při řešení soustavy lineárních rovnic pomocí **Gaussové eliminační metody** budeme postupovat následovně:

1. Převedeme rozšířenou matici soustavy ekvivalentními úpravami na trojúhelníkový tvar.
2. Pomocí Frobéniovy věty rozhodneme o řešitelnosti soustavy.
3. Rozšířenou matici soustavy převedenou na trojúhelníkový tvar zase zapíšeme jako soustavu rovnic a postupně vypočítáme jednotlivé neznámé.

Příklad 1.4.1. *Řešte soustavy rovnic:*

$$a)\ \begin{aligned} x + y - 2z &= 0\\ x - y + 2z &= -4\\ 3x + 3y - 6z &= -2 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 4y - 2z &= 2\\ 6x - 2y + z &= 29\\ 4x - 8y - 4z &= 24 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + y + z &= 2\\ y + z &= -2\\ 4y - 6z &= -12 \end{aligned} \qquad d)\ \begin{aligned} 2x + 5y &= 2\\ -4x + 3y &= -30\\ 4x + 23y &= -22 \end{aligned}$$

Řešení: a) Rozšířenou matici soustavy a upravíme na trojúhelníkový tvar tak, že první řádek odečteme od druhého a trojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 2 & -4\\ 3 & 3 & -6 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 6 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

$hod(\mathbf{A}) = 2,\quad hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3,\quad 2 \neq 3 \quad \Rightarrow$ <u>soustava nemá řešení.</u>

b) Rozšířenou matici budeme upravovat následovně:

1. První řádek vydělíme 2 a třetí řádek vydělíme 4.
2. Přehodíme první a třetí řádek.
3. Šestnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku.
4. Přehodíme první a třetí řádek.
5. Pětnásobek druhého řádku odečteme od třetího řádku.
6. Třetí řádek vydělíme 12.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 4 & -2 & 2\\ 6 & -2 & 1 & 29\\ 4 & -8 & -4 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -1 & 1\\ 6 & -2 & 1 & 29\\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 1 & 29 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$hod(\mathbf{A}) = 3,\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3,$ počet neznámých $n = 3$.
$hod(\mathbf{A}) = hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = n \quad \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení.

K poslední rozšířené matici přiřadíme soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 6 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array} \Rightarrow z = -1,\ y = \frac{1+z}{2} = 0,\ x = 6+2y+z = 6+0-1 = 5$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 5, \quad y = 0, \quad z = -1}}.$

c) Upravujeme rozšířenou matici soustavy:

1. Třetí řádek vydělíme 2.

2. Dvojnásobek druhého řádku odečteme od třetího řádku.

3. Třetí řádek vydělíme -5.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 3 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3 \\ n = 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{právě jedno řešení}$$

Dostali jsme soustavu: $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ & & & & z & = & \dfrac{2}{5} \end{array} \quad \Rightarrow \quad y = -2 - z = -\dfrac{12}{5}$

a nakonec $x = 2 - y - z = 2 + \dfrac{12}{5} - \dfrac{2}{5} = 2 + 2 = 4.$

Řešením soustavy je trojice $\underline{\underline{x = 4,\ y = -\dfrac{12}{5},\ z = \dfrac{2}{5}}}.$

d) 1. Druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

2. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku a třetí řádek vydělíme 26.

3. Druhý řádek vydělíme 13.

4. Druhý řádek odečteme od třetího řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \\ 4 & 23 & -22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \\ 0 & 26 & -52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 2 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2 \\ n = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{právě jedno řešení.}$$

Máme řešit soustavu: $\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 2 \\ & & y & = & -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2-5y}{2} = 6$

Řešením soustavy je $\underline{\underline{x = 6,\ y = -2.}}$

Příklad 1.4.2. *Rozhodnete o řešitelnosti soustavy s parametrem pomocí Frobéniovy věty.*

$a)$ $x + ay = 1$
$ax + 9y = 3$

$b)$ $ax + 4y = 2$
$x + ay = 1$

$c)$ $x + y + z = 1$
$x + ay + z = 1$
$x + y + az = 1$

Řešení: a) Napíšeme rozšířenou matici soustavy a budeme upravovat na trojúhelníkový tvar, stejně jako u soustav bez parametru, odečtením a-násobku prvního řádku od druhého řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a & 9 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 9-a^2 & 3-a \end{array}\right)$$

Vidíme, že $hod(\mathbf{A}) = 1$ pro $9 - a^2 = 0$ a $hod(\mathbf{A}) = 2$ pokud $9 - a^2 \neq 0$.

$$9 - a^2 = (3-a)(3+a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 3$$

$\underline{\underline{\text{Pro } a \neq \pm 3}}$ máme $hod(\mathbf{A}) = 2,\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2,\ \ n = 2 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$

Musíme ještě vyřešit soustavu pro $a = 3$ a pro $a = -3$. V obou případech si nejdříve dosadíme do upravené řozšířené matice soustavy a rozhodneme pomocí Frobéniovy věty.

$$\underline{\underline{a=3}} \;\Rightarrow\; \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 1 \\ n = 2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{nekonečně mnoho řešení.}}}$$

$$\underline{\underline{a=-3}} \;\Rightarrow\; \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{soustava nemá řešení.}}}$$

b) Upravujeme rozšířenou matici soustavy.

1. Předpokládejme, že $a \neq 0$. Druhý řádek vynásobíme číslem a.

2. První řádek odečteme od druhého řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & 4 & 2 \\ a & a^2 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & 4 & 2 \\ 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right)$$

Podobně jako v a) je $hod(\mathbf{A}) = 1$ pro $a^2-4=0$ a $hod(\mathbf{A}) = 2$ pokud $a^2-4 \neq 0,\ a \neq 0$. Máme $a^2-4 = (a-2)(a+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2$.

$\underline{\underline{\text{Pro } a \neq \pm 2, a \neq 0}}$ je $hod(\mathbf{A}) = 2,\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2,\quad n = 2 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$

$$\underline{\underline{a=2}} \;\Rightarrow\; \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 1 \\ n = 2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{nekonečně mnoho řešení.}}}$$

$$\underline{\underline{a=-2}} \;\Rightarrow\; \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{soustava nemá řešení.}}}$$

Ještě musíme vyšetřit případ, kdy $\underline{\underline{a = 0.}}$

$$\text{Potom } \widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 2 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2 \\ n = 2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$$

c) Upravujeme rozšířenou matici soustavy tak, že první řádek odečteme od druhého a od třetího řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme. že $hod(\mathbf{A}) = 1$ pro $a-1=0$ a $hod(\mathbf{A}) = 3$ pokud $a-1 \neq 0$.

$\underline{\underline{\text{Pro } a \neq 1}}$ je $hod(\mathbf{A}) = 3,\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3,\quad n = 3 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$

$$\underline{\underline{a=1}}:\ \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 1 \\ n = 3 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{nekoněčně mnoho řešení.}}}$$

Příklad 1.4.3. *Řešte soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} a)\ x+y-z&=1 \\ x-y+z&=5 \\ 2x+y-z&=4 \\ 3x+2y-2z&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b)\ x+2y+z-u&=1 \\ 2x+3y-z+2u&=3 \\ 4x+7y+z&=5 \\ 5x+7y-4z+7u&=8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c)\ 2x+4y+2z-u&=1 \\ 3x+6y+3z&=6 \\ x+2y+2z-u&=0 \end{aligned}$$

Řešení: a) Rozšířenou matici soustavy a upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

$hod(\mathbf{A}) = 2,\ \ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2,\ n = 3 \ \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - hod(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$ parametru.

K poslední matici přiřadíme soustavu: $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & 2 \end{array}$

Zvolíme si například za $z = p,\ p$ parametr.

Potom máme řešení ve tvaru $\underline{\underline{z = p,\ y = p-2,\ x = 3,\ \ p \in \mathbb{R}.}}$

b) Upravujeme rozšířenou matici soustavy:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 2 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2 \\ n = 4 \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - hod(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$ parametrech.

K poslední matici přiřadíme soustavu: $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & - & u & = & 1 \\ & & y & + & 3z & - & 4u & = & -1 \end{array};$

Zvolíme si $z = p,\ u = q;\ \ p, q$ parametry.

Potom máme řešení $\underline{\underline{z = p,\ u = q,\ y = 4q - 3p - 1,\ x = 3 - 9q + 4p;\ \ p, q \in \mathbb{R}.}}$

c) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 3 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3 \\ n = 4 \end{array} \Rightarrow$$

nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - hod(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$ parametru.

K poslední matici přiřadíme soustavu: $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & - & u & = & 0 \\ & & & & z & - & u & = & -2 \\ & & & & & - & u & = & -3 \end{array}$$

Potom $u = 3$, $z = 1$, a zvolíme si za $y = p$, p parametr a máme řešení $\underline{\underline{x = 1 - 2p,\ y = p,\ z = 1,\ u = 3,\ \ p \in \mathbb{R}.}}$

Příklad 1.4.4. *Řešte homogenní soustavy rovnic:*

a) $$\begin{aligned} x + y - z + u &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 2x + y - z + 2u &= 0 \\ 2y - 3u &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x + 3y - 4z + 4u &= 0 \\ 2x + 3y - z + 2u &= 0 \\ -4x + 5z - u &= 0 \\ 2x + y - 2z + u &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + y - z + u &= 0 \\ 2x + y - z + 2u &= 0 \\ y + z + 4u &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: a) Homogenní soustava rovnic má vždy řešení, a to nulový vektor. Pravá strana se stává ze samých nul, která se nemění ani při ekvivalentních úpravách. Abychom ušetřili zbytečné opisování těchto nul, můžeme upravovat pouze matici soustavy. Pokud $hod(\mathbf{A}) = n$ soustava má pouze triviální řešení (nulový vektor), jinak má soustava nekonečně mnoho řešení.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$hod(\mathbf{A}) = 4$, $n = 4$ $\Rightarrow$ právě jedno řešení $\underline{\underline{x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ u = 0.}}$

b) Upravujeme matici soustavy. Žádnou výměnou řádku nedosáhneme jedničku v levém horním rohu, proto první úprava bude odečtení druhého řádku od prvního. Dále upravujeme tradičním způsobem.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 4\\ 2 & 3 & -1 & 2\\ -4 & 0 & 5 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2\\ 2 & 3 & -1 & 2\\ -4 & 0 & 5 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 3 & 5 & -2\\ 0 & 0 & -7 & 7\\ 0 & 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 4 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 5 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 4 & -3\\ 0 & 0 & -5 & 7\\ 0 & 0 & -7 & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 4 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$hod(\mathbf{A})=3,\ n=4\ \Rightarrow hod(\mathbf{A})\neq n$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n-hod(\mathbf{A})=4-3=1$ parametru.

Zapíšeme příslušnou soustavu:
$$\begin{array}{ccccccccc} x & & & - & 3z & + & 2u & = & 0\\ & & y & + & 4z & - & 3u & = & 0\\ & & & - & z & + & u & = & 0\end{array}$$

Zvolíme si $u=p,\ p$ parametr. Potom $\underline{\underline{u=p,\ z=p,\ y=-p,\ x=p;\quad p\in\mathbb{R}.}}$

c) Upravujeme matici soustavy.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\ \begin{matrix} hod(\mathbf{A})=3\\ n=4\end{matrix}\ ;\quad hod(\mathbf{A})\neq n$$

Nekonečně mnoho řešení, závislých na $n-hod(\mathbf{A})=4-3=1$ parametru.

Máme soustavu:
$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & u & = & 0\\ & - & y & + & z & & & = & 0\\ & & & & z & + & 2u & = & 0\end{array}$$

Zvolíme si $u=p,\ p$ parametr.

Potom řešením soustavy bude $\underline{\underline{u=p,\ z=-2p,\ y=-2p,\ x=-p;\quad p\in\mathbb{R}.}}$

Příklad 1.4.5. *Řešte soustavy rovnic:*

a) $\begin{aligned} x+2y+3z&=7\\ 3x-y+z&=6\\ x+y+z&=4\end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ x+3y+5z&=2\\ 2x+5y+8z&=12\end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2x+4y+6z&=2\\ x-y+z&=4\end{aligned}$

Řešení: a) $x=2,\ y=1,\ z=1$; b) soustava nemá řešení; c) soustava má nekonečně mnoho řešení: $x=3-\frac{5}{3}t,\ y=-1-\frac{2}{3}t,\ z=t,\ t\in\mathbb{R}$. (Porovnejte s příkladem 5.5. ze skript [?].)

FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

2 Diferenciální počet funkce jedné proměnné

2.1 Definiční obory funkcí

Reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení f množiny reálných čísel D do množiny reálných čísel H ($D \subset \mathbb{R}$, $H \subset \mathbb{R}$), pro které platí, že pro každé $x \in D$ existuje jednoznačně určené $y \in H$. Značíme

$$f : D \to H; \quad f : x \to f(x); \quad f : y = f(x),\ x \in D.$$

Množina D se nazývá definičním oborem funkce, H se nazývá oborem hodnot funkce.

Je-li funkce zadána pouze předpisem $f : y = f(x)$, definičním oborem této funkce se rozumí množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má funkce smysl. Při určování této množiny potřebujeme znát definiční obory elementárních funkcí.

Pro všechna reálná čísla jsou definována: funkce mocninná $f : y = x^n, n \in \mathbb{N}$; exponenciální $f : y = a^x, a > 0, a \neq 1$; lichá odmocnina $f : y = x^{\frac{1}{n}}$, n liché; sinus a kosinus $f : y = \sin x$, $f : y = \cos x$; funkce $f : y =$arctg x, $f : y =$arccotg x.

Počítáme-li definiční obor dané funkce, musíme pamatovat na následující:

- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce zlomek — jmenovatel se nesmí rovnat nule.
- Obsahuje-li funkce sudou odmocninu — výraz pod odmocninou musí být nezáporný (≥ 0).
- Obsahuje-li funkce logaritmus — argument logaritmu musí být kladný (> 0).
- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce arcsin x nebo arccos x — argument těchto funkcí musí být větší nebo roven -1 (≥ -1) a zároveň menší nebo roven 1 (≤ 1).
- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce cotg x — argument cotg x se nesmí rovnat celočíselným násobkům π.
- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce tg x — argument tg x se nesmí rovnat číslům $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Příklad 2.1.1. *Najděte definiční obory následujících funkcí:*

a) $f:\ y = \dfrac{2x}{x^2-4x-5}$ b) $g:\ y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{5x}$ c) $h:\ y = \dfrac{5x}{\sqrt{x+3}}$

d) $j:\ y = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-4}}$ e) $k:\ y = \ln(3x-1) + \dfrac{1}{2x-5}$

f) $l: y = \dfrac{1}{\ln(5-3x)}$ g) $m:\ y = \ln\left(x^2-6x+8\right)$

Řešení: a) Funkce f obsahuje zlomek. Proto musí platit, že $x^2-4x-5 \neq 0$. Při řešení této kvadratické nerovnice najdeme nejdříve kořeny příslušné kvadratické rovnice a potom kvadratický polynom rozložíme na součin. Máme:

$x^2-4x-5 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)(x+1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 5,\ x \neq -1$

Z toho definiční obor funkce $\underline{\underline{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 5\}.}}$

b) Funkce g obsahuje zlomek i odmocninu. Proto musí platit:

1. $5x \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq 0$
2. $x+3 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \geq -3$

Výsledek si nakreslíme: 

; $\underline{\underline{D(g) = \langle -3,\ 0) \cup (0,\ \infty).}}$

c) Funkce h zase obsahuje zlomek i odmocninu. Proto:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ x+3 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \geq -3 \\ 2.\ x+3 \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq -3 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \quad x > -3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(h) = (-3,\ \infty).}}$$

d) Funkce j obsahuje zlomek i odmocninu. Musí platit:

1. $x-4 \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq 4$
2. $\dfrac{2x+1}{x-4} \geq 0$

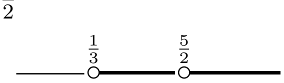
Druhou nerovnici vyřešíme graficky pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele. V tomto případě máme nulové body $x = 4$ a $x = -\frac{1}{2}$. Body naneseme na reálnou osu a na vzniklých intervalech vyzkoušíme znaménko zlomku.

Máme 

a z toho $\underline{\underline{D(j) = \left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right\rangle \cup (4,\ \infty).}}$

e) Funkce k obsahuje funkci logaritmus a zlomek.

1. $3x-1 > 0 \ \Rightarrow\ x > \frac{1}{3}$
2. $2x-5 \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq \frac{5}{2}$

Nakreslíme si obrázek: 

; $\underline{\underline{D(k) = \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2},\ \infty\right).}}$

f) Funkce l obsahuje funkci logaritmus i zlomek:

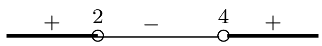
1. $5 - 3x > 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{5}{3}$

2. $\ln(5 - 3x) \neq 0 \;\Rightarrow\; 5 - 3x \neq 1 \;\Rightarrow\; x \neq \dfrac{4}{3}$

; $\underline{\underline{D(l) = \left(-\infty,\ \dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)}}.$

g) Funkce m obsahuje logaritmus. Proto musí být $x^2 - 6x + 8 > 0$. Najdeme kořeny příslušné kvadratické rovnice a kvadratický polynom rozložíme na součin. Máme $x^2 - 6x + 8 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-4) > 0$.

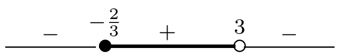
Nerovnici vyřešíme graficky pomocí nulových bodů $x = 2$ a $x = 4$. Body naneseme na reálnou osu a na vzniklých intervalech vyzkoušíme znaménko součinu.

Nakreslíme: 

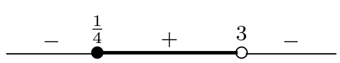
a z toho $\underline{\underline{D(m) = (-\infty,\ 2) \cup (4,\ \infty)}}.$

Příklad 2.1.2. *Najděte definiční obor funkce* $f : y = \sqrt{\ln \dfrac{3x+2}{3-x}}$.

Řešení: Musí platit: 1. $3 - x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 3$

2. $\dfrac{3x+2}{3-x} > 0 \;\Rightarrow$ 

3. $\ln \dfrac{3x+2}{3-x} \geq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{3x+2}{3-x} \geq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{3x+2}{3-x} - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{4x-1}{3-x} \geq 0 \;\Rightarrow$



$\Rightarrow \quad \underline{\underline{D(f) = \left\langle \tfrac{1}{4},\ 3\right)}}.$

Poznámka. U tohoto příkladu jsme mohli vynechat druhou nerovnost. Pokud je splněno, že nějaký výraz je větší nebo se rovná jedné, je tento výraz automaticky kladný. Platnost druhé nerovnosti tehdy plyne z platnosti té třetí.

Příklad 2.1.3. *Najděte definiční obory funkcí obsahujících cyklometrické funkce:*

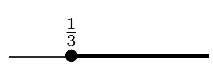
a) $f : y = \arcsin(3x - 2)$

b) $g : y = \arccos(x - 4) + \ln(9 - 2x)$

c) $h : y = \arccos \dfrac{x+1}{x-3}$

d) $k : y = \dfrac{1}{\arcsin(1 + x)}$

Řešení: a) Argument funkce f musí být z intervalu $\langle -1, 1\rangle$.
Řešíme dvě nerovnice, které musí platit zároveň:

1. $3x - 2 \geq -1 \;\Rightarrow\; 3x \geq 1 \;\Rightarrow\; x \geq \frac{1}{3}$ 

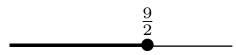
2. $3x - 2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 3x \leq 3 \;\Rightarrow\; x \leq 1$

$\underline{\underline{D(f) = \left\langle \tfrac{1}{3},\ 1\right\rangle}}.$

b) Funkce g obsahuje arccos i logaritmus. Proto:

1. $x - 4 \geq -1 \;\Rightarrow\; x \geq 3$ 

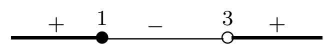
2. $x - 4 \leq 1 \;\Rightarrow\; x \leq 5$ 

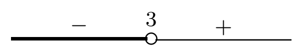
3. $9 - 2x > 0 \;\Rightarrow\; 2x < 9 \;\Rightarrow\; x < \frac{9}{2}$ 

Definiční obor funkce g je průnik těchto tři intervalů: $\underline{\underline{D(g) = \left\langle 3,\ \frac{9}{2}\right)}}$.

c) Funkce h obsahuje zlomek i arccos. Musí platit:

1. $x - 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 3$

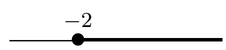
2. $\dfrac{x+1}{x-3} \geq -1 \;\Rightarrow\; \dfrac{x+1}{x-3} + 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{2x-2}{x-3} \geq 0$ 

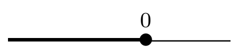
2. $\dfrac{x+1}{x-3} \leq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{x+1}{x-3} - 1 \leq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{4}{x-3} \leq 0$ 

Z toho $\underline{\underline{D(h) = (-\infty,\ 1\rangle}}$.

d) Funkce k obsahuje funkci arcsin a zlomek.

1. $\arcsin(1 + x) \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 + x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -1$

2. $x + 1 \geq -1 \;\Rightarrow\; x \geq -2$ 

3. $x+1 \leq 1 \;\Rightarrow\; x \leq 0$ 

$\underline{\underline{D(k) = \langle -2,\ -1) \cup (-1,\ 0\rangle}}$.

Příklad 2.1.4. *Najděte definiční obory následujících funkcí:*

a) $f:\ y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{2x-1}$ b) $g:\ y = \sqrt{\dfrac{x+5}{3-x}}$ c) $h:\ y = \dfrac{3-2x}{\ln(4-2x)}$

d) $k:\ y = \ln\dfrac{x+2}{x-3}$ e) $l: y = \log(5 + 4x - x^2)$ f) $n:\ y = \dfrac{6}{\sqrt{2x+7}}$

g) $p:\ y = \arccos(6 - 5x)$ h) $q: y = \arcsin\dfrac{x+4}{6-x}$ j) $r:\ y = \arccos\dfrac{2x-1}{x+3}$

Řešení: a) $D(f) = \left\langle -3, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; b) $D(g) = \langle -5, 3)$;
c) $D(h) = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$; d) $D(k) = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$;
e) $D(l) = (-1, 5)$; f) $D(n) = \left(-\frac{7}{2}, \infty\right)$; g) $D(p) = \left\langle 1, \frac{7}{5}\right\rangle$;
h) $D(q) = (-\infty, 1\rangle$; j) $D(r) = \left\langle -\frac{2}{3}, 4\right\rangle$.

2.2 Některé vlastnosti funkcí, inverzní funkce

Sudá funkce — pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = f(-x)$, potom graf funkce je souměrný podle osy y.

Lichá funkce — pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = -f(-x)$, potom graf funkce je souměrný podle počátku.

Periodická funkce s periodou $p \neq 0$ — pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$.

Funkce zdola omezená na množině $M \subset D(f)$ — existuje-li takové reálné číslo d, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.

Funkce shora omezená na množině $M \subset D(f)$ — existuje-li takové reálné číslo h, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.

Funkce omezená na množině $M \subset D(f)$ — je-li f zdola omezená i shora omezená na množině M.

Funkce rostoucí na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce klesající na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce neklesající na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce nerostoucí na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f je prostá na $D(f)$ — jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Poznámka. Aby funkce f mohla být sudá nebo lichá, musí být definiční obor $D(f)$ této funkce symetrická množina podle počátku. Aby mohla být funkce f periodická, musí být $D(f)$ neomezená množina. Má-li periodická funkce f periodu p, pak také každé číslo kp, ($k \neq 0$, celé) je rovněž periodou funkce f.

Poznámka. Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají ryze monotonní funkce, nerostoucí a neklesající funkce zase monotonní funkce na množině M.

Inverzní funkce — je-li f prostá funkce s definičním oborem $D(f)$ a oborem hodnot $H(f)$, potom k tomuto zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Značíme f^{-1}. Platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ a $x = f^{-1}(y)$, právě když $y = f(x)$. Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky o rovnici $y = x$.

Příklad 2.2.1. *Zjistěte, které z následujících funkcí jsou sudé, které liché a které ani sudé, ani liché.*

a) $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ b) $g(x) = x^3 - 4x$ c) $h(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

d) $k(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$ e) $l(x) = \dfrac{x^3}{x^5-3}$ f) $n(x) = 0$

g) $p(x) = \cos x^3$ h) $q(x) = \sin x^2$ j) $r(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

Řešení: a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f(x)$, dle definice $\underline{\underline{\text{funkce } f \text{ je sudá}}}$.

b) $D(g) = \mathbb{R}$, $g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -g(x)$, $\underline{\underline{\text{funkce } g \text{ je lichá}}}$.

c) $D(h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definiční obor funkce není symetrický podle počátku. $\underline{\underline{\text{Funkce } h \text{ není ani sudá ani lichá}}}$.

d) $D(k) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,

$k(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = \dfrac{-x^3}{x^2-3} = -\dfrac{x^3}{x^2-3} = -k(x)$, $\underline{\underline{\text{funkce } k \text{ je lichá}}}$.

e) $D(l) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,

$l(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^5 - 3} = \dfrac{-x^3}{-x^5-3} = \dfrac{x^3}{x^5+3}$, $\underline{\underline{\text{funkce } l \text{ není ani sudá ani lichá}}}$.

f) $D(n) = \mathbb{R}$, $n(-x) = 0 = n(x)$ a také $n(-x) = 0 = -n(x)$. Tato funkce je velice speciální, protože je $\underline{\underline{\text{zároveň sudá a zároveň lichá.}}}$ Takovou vlastnost nemá žádná jiná funkce.

g) sudá; h) lichá; j) ani sudá ani lichá.

Příklad 2.2.2. *Určete inverzní funkci k funkci* $f : y = 6 - 3x$.

Řešení: Funkce f je lineární, a tedy i prostá. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Inverzní funkci budeme hledat tak, že zaměníme x a y a z nové rovnice vyjádříme y.

$f^{-1} : x = 6 - 3y \;\Rightarrow\; x - 6 = -3y \;\Rightarrow\; 3y = 6 - x$. Z toho $\underline{\underline{f^{-1} : y = 2 - \dfrac{x}{3}}}$.

Platí, že $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$, $H(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 2.2.3. *Určete inverzní funkci k funkcím:*

a) $f:\ y = \ln(4-x)$ b) $g:\ y = \dfrac{x+3}{x-4}$ c) $h:\ y = \arcsin\left(\dfrac{2x+5}{3}\right)$

Řešení: a) Definičním oborem funkce f je řešení nerovnice $4-x>0$. Máme $D(f) = (-\infty, 4)$ a $H(f) = \mathbb{R}$.

Funkce f je složená ze dvou prostých funkcí, logaritmické a lineární, je tedy prostá funkce. Zaměníme x a y a z této nové rovnice vyjádříme y.

$$f^{-1}:\ x = \ln(4-y)$$

Inverzní funkce k logaritmické funkci je exponenciální funkce. Aplikujeme tedy exponenciální funkci na obě strany rovnice a dostaneme:

$$\mathrm{e}^x = 4-y, \quad \mathrm{e}^x - 4 = -y, \quad -\mathrm{e}^x + 4 = y \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f^{-1}:\ y = 4-\mathrm{e}^x.}}$$

Platí, že $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$ a $H(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 4)$.

b) Aby byla funkce $y = \dfrac{x+3}{x-4}$ definovaná, musí být $x \neq 4$. Můžeme tedy psát, že $D(g) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

Funkce g je lineární lomená funkce, a je proto prostá (grafem této funkce je hyperbola).

Zaměníme v zadání funkce x a y :

$$g^{-1}: x = \frac{y+3}{y-4} \quad \Rightarrow \quad x(y-4) = y+3 \ \Rightarrow \ xy - 4x = y+3 \ \Rightarrow$$

$$xy - y = 4x+3 \quad \Rightarrow \quad y(x-1) = 4x+3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g^{-1}: y = \frac{4x+3}{x-1}.}}$$

$D(g^{-1}) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty) = H(g)$ a $H(g^{-1}) = D(g) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

c) Aby byla funkce $h:\ y = \arcsin\left(\dfrac{2x+5}{3}\right)$ definovaná, musí platit nerovnice:

$$-1 \leq \frac{2x+5}{3} \leq 1 \ \Rightarrow \ -3 \leq 2x+5 \leq 3 \ \Rightarrow -8 \leq 2x \leq -2 \ \Rightarrow \ x \in \langle -4, -1 \rangle.$$

Funkce h je složená ze dvou prostých funkcí, arcsinus a lineární, a proto je na množině $D(h) = \langle -4, -1 \rangle$ prostá. Inverzní funkce k funkci arcsinus je funkce $\sin x$. Zaměníme v zadání funkce x a y a na obě strany rovnice aplikujeme funkci sinus:

$$h^{-1}: x = \arcsin\left(\frac{2y+5}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2y+5}{3} \ \Rightarrow \ 3\sin x = 2y+5 \ \Rightarrow$$

$$2y = 3\sin x - 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h^{-1}: y = \frac{3\sin x - 5}{2}.}}$$

$D(h^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle = H(h)$ a $H(h^{-1}) = D(h) = \langle -4, -1 \rangle$.

2.3 Limita funkce

Funkce jedné proměnné $f : y = f(x)$ má v bodě a limitu L, jestliže v případě, kdy se hodnota x blíží k číslu a, funkční hodnoty $f(x)$ se blíží k hodnotě (limitě) L.

Symbolicky pak píšeme: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Podobně můžeme definovat $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$ resp. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = B$ tím, že uvažujeme případ, kdy x se blíží k číslu a pouze zprava resp. pouze zleva.

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu. Pokud tedy má existovat $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, musí platit

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Poznámka. Elementární funkce f má v každém bodě svého definičního oboru $D(f)$ limitu rovnou funkční hodnotě v tomto bodě. Zřejmě bude zajímavější počítat limity v bodech, které nepatří do $D(f)$, a v bodech $\pm\infty$.

Mají-li funkce f, g v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné limity, tj. existují-li limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$, pak mají v tomto bodě limity i funkce $f+g$, $f-g$, fg, cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Je-li navíc $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, existuje také limita funkce $\dfrac{f}{g}$ v bodě a a platí:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Pro výpočet limit funkce se často používá tato věta: Jestliže pro dvě funkce f, g platí, že pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a je $f(x) = g(x)$, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje, právě když existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Můžeme při počítání limit funkce použít i následující vztahy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k$$

Nechť jsou $f(x)$ a $g(x)$ dva plynomy, přičemž $a\,x^n$ je člen s nejvyšší mocninou polynomu $f(x)$ a $b\,x^m$ je člen s nejvyšší mocninou v polynomu $g(x)$. Potom

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a\,x^n}{b\,x^m}$$

Příklad 2.3.1. *Určete limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(6-3\cos x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{1-3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-2}$

Řešení: Bod a, ve kterém počítáme limitu patří do definičního oboru funkce, a proto limity počítáme pouhým dosazením.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5)=1^2-5=\underline{\underline{4}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(6-3\cos x)=6-3\cos 0=6-3\cdot 1=\underline{\underline{3}}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{1-3x}=\sqrt{1-3\cdot(-1)}=\sqrt{4}=\underline{\underline{2}}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{3-2}=\underline{\underline{1}}$.

Příklad 2.3.2. *Určete limity následujících funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^3-1}$ c) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

Řešení: a) Funkce $f: y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ není v bodě $x=2$ definována. Můžeme však v $\mathbb{R}-\{2\}$ provést úpravu

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2=g(x).$$

Potom

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=\underline{\underline{4}}.$$

b) Postupujeme podobně jako v části a).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3+1)(x^3-1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}x^3+1=\underline{\underline{2.}}$$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x+5}=\lim\limits_{x\to 5}x-1=\underline{\underline{4.}}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)}{(x-2)2x}=\lim\limits_{x\to 2}-\dfrac{1}{2x}=\underline{\underline{-\dfrac{1}{4}}}.$

Příklad 2.3.3. *Vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

Řešení: a) Chtěli bychom „nuly“ vykrátit stejně, jako jsme to dělali v předchozím příkladě. K tomu potřebujeme polynomy namísto odmocnin. Proto lomený výraz rozšíříme výrazem $\sqrt{x^3+1}+1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^3+1}+1}{\sqrt{x^3+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3+1)-1}{x^2(\sqrt{x^3+1}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2(\sqrt{x^3+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}+1} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0.}}$$

b) $$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to 3} \sqrt{x+1}+2 = 2+2 = \underline{\underline{4.}}$$

c) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2-4)}{(x+7-9)} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}.}}$$

Příklad 2.3.4. *Vypočtěte limity funkcí v nevlastních bodech:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x+6}{4x^2-9x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-3x-2}{2x^2+7x-23}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-1}{4x^4-5x^2+3}$

Řešení: Počítáme limitu z podílu dvou polynomů. O limitě rozhodují nejvyšší mocniny čitatele i jmenovatele.

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x+6}{4x^2-9x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3}{4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{4} = \underline{\underline{\infty.}}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-3x-2}{2x^2+7x-23} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{2} = \underline{\underline{3.}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-1}{4x^4-5x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{4x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \underline{\underline{0.}}$$

Příklad 2.3.5. *Vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 9x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x}$

Řešení: a) Budeme využívat vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Potřebujeme ale nejdřív zajistit, aby v argumentu funkce sin byla stejná funkce jako ve jmenovateli. Proto lomený výraz rozšíříme číslem 9.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{x}\cdot\frac{9}{9} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{9x}\cdot 9 = 1\cdot 9 = \underline{\underline{9.}}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}\cdot\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x = 1\cdot 0 = \underline{\underline{0.}}$$

c) Budeme využívat vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x}\right)^x = \underline{\underline{\mathrm{e}^{-3}.}}$$

d) Výraz převedeme zase na vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k$. Upravujeme:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+7}{x+5}-1\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+7-x-5}{x+5}\right)^{2x} =$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{x+5}\cdot 2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{x+5\cdot\frac{2x}{x+5}} =$$
$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{x+5}\right]^{\frac{2x}{x+5}} = \left[\mathrm{e}^2\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+5}} = \mathrm{e}^{2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+5}} = \mathrm{e}^{2\cdot 2} = \underline{\underline{\mathrm{e}^4.}}$$

Příklad 2.3.6. *Určete limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-6x+5)$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-2\sin x)$ c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-12x+20}{x^2-5x+6}$ f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^2-1}{x^3-4x-5}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^2-1}{x^3-4x-5}$

Řešení: a) 1; b) -1; c) -8; d) $-\frac{1}{2}$; e) 8; f) $\frac{3}{4}$; g) 1; h) 0; j) $\frac{1}{5}$.

2.4 Derivace funkce

Derivace funkce f **v bodě** x_0 — pokud existuje limita, pak $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$.

Derivace funkce f **na množině** M — funkce $f' : \ y = f'(x), \ x \in M$.

n-tá derivace funkce f **na množině** M — funkce $f^{(n)} : \ y = (f^{(n-1)})'(x), \ x \in M$.

Rovnice tečny ke grafu funkce f **v bodě** $[x_0, f(x_0)]$ — přímka t, která má rovnici

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

Vzorec pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce
$c' = 0$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(x^n)' = nx^{n-1}, \ n \in \mathbf{N}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbf{R}$	$x \in (0, \infty)$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(a^x)' = a^x \ln a, \ a > 0$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, \infty)$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbf{Z}$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$	$x \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty, \infty)$

Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkce:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(cu)' = cu',\ c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0$$

Vzorec pro derivaci složené funkce: $[f \circ \varphi]'(x) = f'(u)\varphi'(x)$, kde $u = \varphi(x)$.

Příklad 2.4.1. *Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných předpisy:*

a) $y = 5\sin x - 6\,\mathrm{e}^x + 3$ b) $y = 2\,x^3 - \sqrt[3]{x^2}$ c) $y = (x-5)\cos x$ d) $y = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

Řešení: a) $y' = \underline{\underline{5\cos x - 6\ \mathrm{e}^x}}$; b) $y' = \underline{\underline{6\,x^2 - \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}}$;

c) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování součinu.

$y' = (x-5)'\cos x + (x-5)(\cos x)' = \underline{\underline{\cos x - (x-5)\sin x}}.$

d) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování podílu.

$$y' = \frac{(1-\sin x)'(1+\sin x) - (1-\sin x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x - \cos x\sin x - \cos x + \sin x\cos x}{(1+\sin x)^2} = \underline{\underline{\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}}}.$$

Příklad 2.4.2. *Vypočtěte derivace funkcí v bodě $x_0 = -1$:*

a) $y = \pi x^3 - 7x$ b) $y = e^x(x^2-1)$ c) $y = \dfrac{x+5}{x^2}$ d) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

Řešení: a) $y' = 3\pi x^2 - 7$, $y'(-1) = 3\pi - 7$; b) $y' = \mathrm{e}^x\,(x^2 + 2x - 1)$, $y'(-1) = -\dfrac{2}{e}$; c) $y' = -\dfrac{x+10}{x^3}$, $y'(-1) = -9$; d) $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, $y'(-1) = 4$.

Příklad 2.4.3. *Derivujte funkce:*

a) $y = 5 - 6\,x^3$ b) $y = \sqrt[3]{x}\,(x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}})$ c) $y = \sin x\,\cos x$ d) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

Řešení: a) $y' = -18x^2$; b) $y' = (x^{\frac{7}{3}} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}})' = \dfrac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{1}{12\sqrt[6]{x^7}}$;

c) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$; d) $y' = \dfrac{1}{1-\sin x}$.

Příklad 2.4.4. *Zderivujte složené funkce* $y = \sin 2x$, $y = \sin^2 x$ *a* $y = \sin^2 2x$.

Řešení: Funkce $y = \sin 2x$ se dá zapsat jako $y = \sin\varphi$, $\varphi = 2x$.

Potom $y' = (\sin\varphi)'(2x)' = \cos\varphi \cdot 2 = \underline{\underline{2\cos 2x.}}$

Podobně funkce $y = \sin^2 x$ se dá zapsat jako $y = \varphi^2$, $\varphi = \sin x$.

Potom $y' = (\varphi^2)'(\sin x)' = 2\varphi \cdot \cos x = 2\sin x\cos x = \underline{\underline{\sin 2x.}}$

Funkce $y = \sin^2 2x$ je dvakrát složená: $y = \varphi^2$, $\varphi = \sin\xi$, $\xi = 2x$.

Potom $y' = (\varphi^2)'(\sin\xi)'(2x)' = 2\varphi \cdot \cos\xi \cdot 2 = 4\sin 2x\cos 2x = \underline{\underline{2\sin 4x.}}$

Příklad 2.4.5. *Vypočtěte derivace funkcí:*

a) $y = \ln(x^2 - 8)$ b) $y = \mathrm{e}^x \sin^2 x$ c) $y = \mathrm{e}^{\sin x}$ d) $y = \cos \mathrm{e}^x$ e) $y = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$

Řešení: a) $y' = \dfrac{1}{x^2-8} \cdot (2x - 0) = \underline{\underline{\dfrac{2x}{x^2-8}}}.$

b) $y' = \mathrm{e}^x \sin^2 x + \mathrm{e}^x 2\sin x\cos x = \underline{\underline{\mathrm{e}^x \sin x\,(\sin x + 2\cos x)}}.$

c) $y' = \underline{\underline{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}}.$ d) $y' = \underline{\underline{-\mathrm{e}^x \sin \mathrm{e}^x}}.$

e) $y' = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}} \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} = \underline{\underline{\dfrac{-2}{x^2-1}}}.$

Příklad 2.4.6. *Vypočtěte* $f'''(x)$, *kde:*

a) $f(x) = 4x^3 - 5x + 2$ b) $y = \mathrm{e}^x(x^2 - 2)$ c) $y = \mathrm{e}^{x^2}$ d) $y = \ln(3x + 2)$

Řešení: a) $f'(x) = 12x^2 - 5$, $f''(x) = 24\,x$, $\underline{\underline{f'''(x) = 24}}.$

b) $f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 2) + \mathrm{e}^x\, 2x = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 2)$,

$f''(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 2) + \mathrm{e}^x(2x + 2) = \mathrm{e}^x(x^2 + 4x)$,

$f'''(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 4x) + \mathrm{e}^x(2x + 4) = \underline{\underline{= \mathrm{e}^x(x^2 + 6x + 4)}}.$

c) $f'(x) = \mathrm{e}^{x^2}\, 2x$, $f''(x) = \mathrm{e}^{x^2}\, 2x\, 2x + \mathrm{e}^{x^2}\, 2 = \mathrm{e}^{x^2}\,(4x^2 + 2)$,

$f'''(x) = \mathrm{e}^{x^2}\, 2x\,(4x^2 + 2) + \mathrm{e}^{x^2}\, 8x = \underline{\underline{\mathrm{e}^{x^2}\,(8x^3 + 12x)}}.$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{3x+2} \cdot 3 = 3(3x+2)^{-1}$, $f''(x) = -3(3x+2)^{-2} \cdot 3 = -9(3x+2)^{-2}$,

$f'''(x) = 18(3x + 2)^{-3} \cdot 3 = \underline{\underline{\dfrac{54}{(3x+2)^3}}}.$

Příklad 2.4.7. *Napište rovnici tečny ke grafu funkce* $f(x)$ *v bodě* $\mathrm{T} = [1, ?\,]$, *kde*

a) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+2}$ b) $f(x) = x \ln x$ c) $f(x) = 3x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x}}$

Řešení: a) Potřebujeme dosadit do rovnice $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ za $x_0,\ f(x_0),\ f'(x_0)$. Ze zadání $x_0 = 1$. Potom $f(x_0) = f(1) = \frac{2\cdot 1-5}{1+2} = -1$.
Pro směrnici tečny potřebujeme vypočítat derivaci funkce.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x+2) - (2x-5)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+5}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$$

Po dosazení dostaneme $f'(x_0) = f'(1) = 1$.

Rovnice tečny bude $t:\ y + 1 = 1(x-1)$. Po úpravě $\underline{\underline{t : x - y - 2 = 0}}$.

b) $x_0 = 1,\ f(x_0) = f(1) = 1 \ln 1 = 0,\ f'(x) = 1\cdot\ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1,\ f'(1) = 1$
Po dosazení do rovnice dostaneme $\underline{\underline{t:\ y = x - 1}}$.

c) $x_0 = 1,\quad f(x_0) = 3\,\mathrm{e}^0 = 3,\quad f'(x) = 3\cdot\mathrm{e}^{1-x^2} + 3x\ \mathrm{e}^{1-x^2}(-2x) =$
$3\,\mathrm{e}^{1-x^2}(1-2x^2),\ f'(1) = 3\,\mathrm{e}^0(1-2) = -3$. Po dosazení a úpravě $\underline{\underline{t:\ 3x + y - 6 = 0}}$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{5-x}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{-1x-(5-x)1}{x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{5-x}}\left(-\dfrac{5}{x^2}\right) \Rightarrow$

$f'(1) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{4}}(-5) = -\dfrac{5}{4},\ x_0 = 1,\ f(1) = \sqrt{\dfrac{5-1}{1}} = 2 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{t:\ 5x + 4y - 13 = 0}}$.

Příklad 2.4.8. *Napište rovnici tečny ke grafu funkce* $f(x) = \ln(2x+7)$

a) *v bodě* $\mathrm{T} = [-3, ?\,]$,

b) *která je rovnoběžná s přímkou* $y = 4x - 3$.

Řešení: a) $T = [-3,\ \ln(2(-3)+7)\,] = [-3, 0\,]$. Pro směrnici tečny potřebujeme derivaci funkce v v bodě T.

$$f'(x) = \frac{1}{2x+7}\cdot 2, \qquad f'(-3) = \frac{2}{2(-3)+7} = 2$$

Po dosazení do rovnice $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$ dostaneme $y = 2(x+3)$.
Po úpravě $\underline{\underline{2x - y + 6 = 0}}$.

b) Směrnici tečny v libovolném bodě $[x_0, f(x_0)]$ bude $k_t = f'(x_0) = \dfrac{2}{2x_0+7}$.

Na druhé straně tečna má být rovnoběžná s danou přímkou, proto směrnice tečny se rovná směrnici přímky $k = 4$. První souřadnici bodu T dostaneme řešením rovnice $k_t = k$.

$$\frac{2}{2x_0+7} = 4 \quad\Rightarrow\quad 1 = 4x_0 + 14 \quad\Rightarrow\quad x_0 = -\frac{13}{4}.$$

Potom $T = [-\frac{13}{4},\ \ln(-\frac{13}{2}+7)\,] = [-\frac{13}{4}, \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2\,] = [-\frac{13}{4}, -\ln 2\,]$.

Po dosazení do rovnice dostaneme $t:\ y + \ln 2 = 4(x + \frac{13}{4})$.

Po úpravě $\underline{\underline{t:\ 4\,x - y + 13 - \ln 2 = 0}}$.

Příklad 2.4.9. *Určete rovnice tečen ke křivce* $y = x^3 + x^2 - 2x$ *v jejich průsečících s osou* x.

Řešení: Průsečíky křivky s osou x určíme řešením rovnice $x^3+x^2-2x = 0$. Rovnici převedeme na součinový tvar $x(x-1)(x+2) = 0$ a dostaneme kořeny $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$. Hledáme tedy rovnice tečen dané křivky v bodech $T_1 = [-2, 0],\ T_2 = [0, 0],\ T_3 = [1, 0]$.
Pro směrnici tečny v libovolném bodě $[x_0, y(x_0)]$ platí $k = y'(x_0)$.

Protože

$$y'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$

dostaneme $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 2$. Směrnice tečen uvažované křivky v bodech $T_1,\ T_2,\ T_3$ jsou

$$k_1 = y'(-2) = 6,$$

$$k_2 = y'(0) = -2,$$

$$k_3 = y'(1) = 3.$$

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ obdržíme

pro $T_1 = [-2, 0]$ a $k_1 = 6:\ y = 6(x+2)$ tj. $\underline{\underline{6x - y + 12 = 0}}$;

pro $T_2 = [0, 0],\ k_2 = -2:\ y = -2x$ tj. $\underline{\underline{2x + y = 0}}$;

pro $T_3 = [1, 0],\ k_3 = 3:\ y = 3(x-1)$ tj. $\underline{\underline{3x - y - 3 = 0.}}$

Příklad 2.4.10. *Určete rovnici tečny ke grafu funkce* $f:\ y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ *v bodě* $T = [1, ?]$.

Řešení: $2x - 9y + 1 = 0$.

Příklad 2.4.11. *Určete rovnice tečen ke křivce* $y = x^3 + x^2 - 6x$ *v jejich průsečících s osou* x.

Řešení: $15\,x - y + 45 = 0,\ 6\,x + y = 0,\ 10\,x - y - 20 = 0$.

Příklad 2.4.12. *Určete rovnici tečny ke křivce* $y = \dfrac{e^x}{2} + 1$, *která je rovnoběžná s přímkou* $p: x - 2y = 1 = 0$.

Řešení: $T[0, \frac{3}{2}]$, $t:\ x - 2\,y + 3 = 0$.

Příklad 2.4.13. *Derivujte funkce a derivaci upravte:*

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 9})$ b) $g(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^6} + \operatorname{arctg} x^3$ c) $h(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

d) $k(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$ e) $l(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ f) $n(x) = \ln \sin x$

g) $p(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ h) $q(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{1 - x}}{1 - \sqrt{1 - x}}}$ j) $r(x) = \arcsin \sqrt{x}$

Řešení: a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$; b) $g'(x) = \dfrac{6x^2}{(1 + x^6)^2}$; c) $h'(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;
d) $k'(x) = \dfrac{2}{\cos^3 x}$; e) $l'(x) = \arcsin x$; f) $n'(x) = \operatorname{cotg} x$;
g) $p'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}$; h) $q'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{1 - x}}$; j) $q'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

2.5 L´Hospitalovo pravidlo

L´Hospitalovo pravidlo — metoda výpočtu limit pomocí derivací:

1. Nechť spojité funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkční hodnoty $f(x_0) = g(x_0) = 0$ a nechť existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ nebo $-\infty$ a existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Neurčitý výraz — výraz typu: $\dfrac{0}{0}$; $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0

Příklad 2.5.1. *Užitím l´Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^5 - 2x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2 - 3x - 6}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\sin x - x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 4x}$

Řešení: a) Je to limita z neurčitého výrazu typu $\dfrac{0}{0}$, a proto můžeme použít l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^3 + 1)'}{(x^5 - 2x - 1)'} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{5x^4 - 2} = \frac{3}{3} = \underline{\underline{1}}.$$

b) Limita z neurčitého výrazu typu $\dfrac{\infty}{\infty}$, použijeme l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2-3x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2-3x-6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2-3x}=\underline{\underline{0}}.$$

c) Je to limita z neurčitého výrazu typu $\dfrac{0}{0}$, použijeme l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(\sin x-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x-1}$$

Znova máme limitu typu $\dfrac{0}{0}$, použijeme l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(\cos x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{-\sin x}$$

Máme limitu typu $\dfrac{0}{0}$, použijeme l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(6x)'}{(-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{-\cos x}=\underline{\underline{-6.}}$$

d) Je to limita z neurčitého výrazu typu $\dfrac{0}{0}$, použijeme l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin\pi x)'}{(\sin 4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\cos\pi x}{4\cos 4x}=\frac{\pi\cos 0}{4\cos 0}=\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Příklad 2.5.2. *Užitím l´Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-2x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{(4x-\pi)^2}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$

Řešení: a) $\dfrac{0}{0}\ \Rightarrow\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2 x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}.$

b) $\dfrac{0}{0}\ \Rightarrow\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}2x}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}2x2x+e^{x^2}2}{-\cos x}=\frac{2}{-1}=\underline{\underline{-2}}.$

c) Typ $\dfrac{-\infty}{-\infty}\ \Rightarrow\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2}x}{\pi x-\pi}=$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2\cdot 2\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi} = \underline{\underline{0}}.$$

d) 2; e) 0; f) -1; g) 0; h) $\frac{1}{8}$; j) $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Příklad 2.5.3. *Vypočtěte limity z neurčitého výrazu typu* $\infty-\infty$:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$

Řešení: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\infty$ $\Rightarrow$ máme typ limity $\infty-\infty$.

Upravíme na společného jmenovatele, dostaneme limitu typu $\dfrac{0}{0}$ a použijeme l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1+1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2+x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{5}$.

Příklad 2.5.4. *Vypočtěte limity z neurčitého výrazu typu* $0\cdot\infty$:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x^2)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{4+x}{2+x}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)\operatorname{cotg} x$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$

Řešení: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ $\Rightarrow$ máme typ limity $0\cdot(-\infty)$.

Chtěli bychom upravit na l´Hospitalovo pravidlo, tedy na typ $\dfrac{0}{0}$ nebo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{1}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Vidíme, že jsme rozšírením výrazem $\dfrac{1}{x}$ dostali limitu typu $\dfrac{-\infty}{\infty}$, a můžeme tedy použít l´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = \underline{\underline{0}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)}{1}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} =$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{1}}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x^2)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right)}{1}\cdot\dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x} =$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2x}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}\frac{\pi}{2}} = \dfrac{-2}{-\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\dfrac{4}{\pi}}}.$ d) 2; e) 1; f) 3.

Příklad 2.5.5. *Vypočtěte limity z neurčitých výrazu typu* 1^∞; ∞^0; 0^0:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x + x)^{\frac{1}{x}}$

Řešení: Limity v tomto příkladě jsou $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$. Ve všech případech se jedna o neurčité výrazy. Při výpočtu limity nejdříve užijeme rovnosti

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln a^b} = \mathrm{e}^{b\ln a}, \quad a > 0.$$

a) Jedna se o neurčitý výraz typu 0^0. Upravujeme.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$$

Spočítáme limitu z exponentu, která je typu $0\cdot\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x = \mathrm{e}^0 = \underline{\underline{1}}.$$

b) Je to neurčitý výraz typu 1^∞.

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}} =$$

$$\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin 2x}{x\cos 2x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-2\cos 2x}{\cos 2x - 2x\sin 2x}} = \underline{\underline{\mathrm{e}^{-2}}}.$$

c) Neurčitý výraz typu 0^0.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{3}{4+\ln x}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3\ln x}{4+\ln x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}} = \underline{\underline{\mathrm{e}^3}}.$$

d) 1; e) 1; f) e^2.

Příklad 2.5.6. *Užitím l´Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\pi - x}{\sin 5x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} - 1\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\mathrm{e}^x - 1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

Řešení: a) $\dfrac{1}{5}$; b) 3; c) 0; d) 1; e) 1; f) $\dfrac{1}{6}$.

3 Integrální počet funkce jedné proměnné

3.1 Integrační metody

Primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) — funkce $F:(a,b)\to\mathbb{R}$, taková, že $F'(x)=f(x)$ pro všechna $x\in(a,b)$.

Neurčitý integrál funkce f — jiný název pro primitivní funkci. Značíme $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

Poznámka. Primitivní funkce není určena jednoznačně. Přičteme-li k dané primitivní funkci konstantu, dostaneme zase primitivní funkci:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Pravidla pro výpočet neurčitých integrálů:

- $\displaystyle\int a\, f(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a\in\mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \Big(f(x)\pm g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C, \quad f(x)\neq 0$
- metoda per partes:
$$\int u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x$$
- substituční metoda:
$$\int f\Big(\varphi(x)\Big)\,\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\ \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\ \mathrm{d}t$$

Příklad 3.1.1. *Vypočtěte integrály:*

a) $\displaystyle\int \frac{6}{x^3}\ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int (7\cos x - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{10x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: a) $\displaystyle\int \frac{6\,\mathrm{d}x}{x^3} = 6\int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{6x^{-2}}{-2} + C = \underline{\underline{-\frac{3}{x^2}+C}}$

b) $\int(7\cos x - \mathrm{e}^x)\ \mathrm{d}x = 7\int\cos x\ \mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{7\sin x - \mathrm{e}^x + C}}$

c) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+4}\ \mathrm{d}x = 5\int\frac{1}{x^2+2^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C}}$

d) $\displaystyle\int \frac{10x}{x^2+4}\ \mathrm{d}x = 5\int\frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = 5\int\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{5\ \ln(x^2+4)+C}}$

Vzorce pro integraci elementárních funkcí

Vzorec pro neurčitý integrál	Podmínky platnosti vzorce
$\int 0 \ \mathrm{d}x = c \ (c \in \mathbb{R})$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\int 1 \ \mathrm{d}x = x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\displaystyle\int x^n \ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$
$\displaystyle\int x^r \ \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (0, \infty), \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\displaystyle\int \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x = \ln\|x\| + c$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\int \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\displaystyle\int a^x \ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty, \infty), \quad a > 0, \quad a \neq 1$
$\displaystyle\int \sin x \ \mathrm{d}x = -\cos x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\displaystyle\int \cos x \ \mathrm{d}x = \sin x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\displaystyle\int \frac{1}{(\cos x)^2} \ \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbf{Z}$
$\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^2} \ \mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\, x + c$	$x \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + c$	$x \in (-\infty, \infty), \quad a > 0$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + c$	$x \in (-a, a), \quad a > 0$

Příklad 3.1.2. *Vypočtěte integrály:*

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\ x}{\sin\ 2x}\ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{3+5x}{x^2+9}\ \mathrm{d}x$

Řešení: a) Funkci, kterou chceme integrovat, nejdříve upravíme. Využijeme vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\ \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{\mathrm{tg}\ x - \mathrm{cotg}\ x + C}}.$$

b) Využijeme vztahy $\mathrm{tg}\ x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$\int \frac{\mathrm{tg}\ x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2 \sin x \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{2 \sin x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2 \cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ \mathrm{tg}\ x + C}}.$$

c) Upravíme: $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x =$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x + \int x^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C}}.$$

d) Upravíme na dva zlomky a každý zlomek integrujeme zvlášť:

$$\int \frac{3+5x}{x^2+9}\ \mathrm{d}x = \int \frac{3}{x^2+9}\ \mathrm{d}x + \int \frac{5x}{x^2+9}\ \mathrm{d}x = 3 \int \frac{1}{x^2+3^2}\ \mathrm{d}x + \frac{5}{2} \int \frac{2x}{x^2+9}\ \mathrm{d}x$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x}{3} + \frac{5}{2}\ \ln|x^2+9| + C = \underline{\underline{\mathrm{arctg}\ \frac{x}{3} + \frac{5}{2}\ \ln(x^2+9) + C}}.$$

Příklad 3.1.3. *Metodou per partes vypočtěte* $\displaystyle\int f(x)\, dx$ *funkce*

a) $f(x) = (6x-3)\,\mathrm{e}^x$ b) $f(x) = x \cos x$ c) $f(x) = x^2\ \ln x$

d) $f(x) = \ln x$ e) $f(x) = \mathrm{arctg}\ x$ f) $f(x) = \ln(x^2+1)$

g) $f(x) = (x^2+1)\ \mathrm{e}^x$ h) $f(x) = (3x^2-4) \sin x$ j) $f(x) = (x^2-4x+2) \cos x$

Řešení: a) $\displaystyle\int (6x-3)\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rclrcl} u' &=& \mathrm{e}^x & u &=& \mathrm{e}^x \\ v &=& 6x-3 & v' &=& 6 \end{array} \right| =$

$$= (6x-3)\,\mathrm{e}^x - \int 6\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = (6x-3)\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x + C = \underline{\underline{(6x-9)\,\mathrm{e}^x + C}}.$$

b) $\displaystyle\int x\cos x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & \cos x & u = & \sin x \\ v = & x & v' = & 1 \end{array}\right| = x\sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x =$

$= \underline{\underline{x\sin x + \cos x + C}}.$

c) $\displaystyle\int x^2\ \ln x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & x^2 & u = & \frac{x^3}{3} \\ v = & \ln x & v' = & \frac{1}{x} \end{array}\right| = \ldots = \underline{\underline{\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C}}.$

d) $\displaystyle\int \ln x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & 1 & u = & x \\ v = & \ln x & v' = & \frac{1}{x} \end{array}\right| = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{x\ln x - x + C}}.$

e) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & 1 & u = & x \\ v = & \operatorname{arctg}\ x & v' = & \frac{1}{x^2+1} \end{array}\right| = x\ \operatorname{arctg} x - \int x\frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x =$

$\displaystyle = x\ \operatorname{arctg}\ x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{x\ \operatorname{arctg}\ x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C}}.$

f) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & 1 & u = & x \\ v = & \ln(x^2+1) & v' = & \frac{2x}{x^2+1} \end{array}\right| = x\ \ln(x^2+1) - \int x\frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x =$

$\displaystyle = x\ \ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = x\ \ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x =$

$\displaystyle = x\ \ln(x^2+1) - 2\int 1\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{x\ \ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg}\ x + C}}.$

g) $\displaystyle\int (x^2+1)\ \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & \mathrm{e}^x & u = & \mathrm{e}^x \\ v = & x^2+1 & v' = & 2x \end{array}\right| = (x^2+1)\ \mathrm{e}^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x =$

$\displaystyle = \left|\begin{array}{llll} u' = & \mathrm{e}^x & u = & \mathrm{e}^x \\ v = & 2x & v' = & 2 \end{array}\right| = (x^2+1)\ \mathrm{e}^x - \left(2x\,\mathrm{e}^x - \int 2\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x\right) =$

$= (x^2+1)\ \mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x = \underline{\underline{\mathrm{e}^x\,(x^2-2x+3) + C}}.$

h) $\displaystyle\int (3x^2-4)\sin x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & \sin x & u = & -\cos x \\ v = & 3x^2-4 & v' = & 6x \end{array}\right| =$

$\displaystyle = -(3x^2-4)\cos x + \int 6x\ \cos x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & \cos x & u = & \sin x \\ v = & 6x & v' = & 6 \end{array}\right| =$

$\displaystyle = -(3x^2-4)\cos x + 6x\ \sin x - \int 6\sin x\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{6x\ \sin x + (10-3x^2)\ \cos x + C}}.$

j) $\displaystyle\int (x^2-4x+2)\cos x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & \cos x & u = & \sin x \\ v = & x^2-4x+2 & v' = & 2x-4 \end{array}\right| =$

$\displaystyle = (x^2-4x+2)\sin x - \int (2x-4)\ \sin x\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u' = & \sin x & u = & -\cos x \\ v = & 2x-4 & v' = & 2 \end{array}\right| =$

$\displaystyle (x^2-4x+2)\sin x + (2x-4)\cos x - \int 2\cos x\ \mathrm{d}x = \underline{\underline{(x^2-4x)\ \sin x + (2x-4)\ \cos x + C}}.$

Příklad 3.1.4. *Použijte substituční metodu na výpočet* $\displaystyle\int f(x)\,dx$*, kde*

a) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ b) $f(x)=\sin(5-3x)$ c) $f(x)=4\sqrt{2x+3}$

d) $f(x)=2x\,\mathrm{e}^{x^2+4}$ e) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x+9}$ f) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}$

g) $f(x)=\mathrm{e}^x\sin\mathrm{e}^x$ h) $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ j) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin^2 2x}}$

Řešení: a) $$\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}2x=t\\ 2\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x=\frac12\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int \mathrm{e}^t\,\frac12\,\mathrm{d}t=\frac12\mathrm{e}^t+C=\underline{\underline{\frac12\,\mathrm{e}^{2x}+C}}.$$

b) $$\int\sin(5-3x)\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}5-3x=t\\ -3\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x=-\frac13\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\sin t\left(-\frac13\,\mathrm{d}t\right)=\frac13\cos t+C=$$
$$=\underline{\underline{\frac13\cos(5-3x)+C}}.$$

c) $$\int 4\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}2x+3=t\\ 2\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x=\frac12\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int 4\sqrt{t}\,\frac12\,\mathrm{d}t=2\int t^{\frac12}\,\mathrm{d}t=2\,\frac{t^{\frac32}}{\frac32}=$$
$$=\frac43\sqrt{t^3}+C=\underline{\underline{\frac43\sqrt{(2x+3)^3}+C}}.$$

d) $$\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}x^2+4=t\\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t+C=\underline{\underline{\mathrm{e}^{x^2+4}+C}}.$$

e) $$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x+9}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\ -\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ \sin x\,\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{-1}{t^2+9}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{t^2+3^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=-\frac13\operatorname{arctg}\frac t3+C=\underline{\underline{-\frac13\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{3}+C}}.$$

f) $$\int\frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac1x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t=\frac34\sqrt[3]{t^4}+C=\underline{\underline{\frac34\sqrt[3]{\ln^4 x}+C}}.$$

g) $$\int\mathrm{e}^x\sin\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}\mathrm{e}^x=t\\ \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\sin t\,\mathrm{d}t=-\cos t+C=\underline{\underline{-\cos\mathrm{e}^x+C}}.$$

h) $$\int\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac1x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\operatorname{arctg}t+C=\underline{\underline{\operatorname{arctg}\ln x+C}}.$$

j) $$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin^2 2x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{\frac{1}{2}\arcsin(\sin 2x) + C}}.$$

Příklad 3.1.5. *Vypočtěte integrál* $\int 6\,x^2 \arcsin x^3\,\mathrm{d}x$.

Řešení: $$\int 6\,x^2 \arcsin x^3\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^3 = t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ 6x^2\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int 2\arcsin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{llll} u' = & 2 & u = & 2t \\ v = & \arcsin t & v' = & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = 2t\arcsin t - \int \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{c} 1-t^2 = s \\ -2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s \\ 2t\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = 2t\arcsin t + \int \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = 2t\arcsin t + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2t\arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + C = \underline{\underline{2\left(x^3 \arcsin x^3 + \sqrt{1-x^6}\right) + C}}.$$

Příklad 3.1.6. *Vypočítejte následující integrály:*

a) $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int (\sin^5 x)\,\cos x\,\mathrm{d}x$ e) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{\sin x}{36+4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^2\mathrm{d}x$ h) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ j) $\int (x+3)^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

k) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ l) $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x$ m) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: a) $\ln(\ln x) + C$; b) $\frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C$; c) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C$;

d) $\frac{\sin^6 x}{6} + C$; e) $\mathrm{tg}\,x - x + C$; f) $-\frac{1}{12}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{3} + C$;

g) $\frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} - 2x + C$; h) $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$; j) $(x^2+4x+5)\,\mathrm{e}^x + C$;

k) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$; l) $\frac{x+1}{3}\sqrt{2x-1} + C$; m) $\frac{1}{2}\arcsin 2x + C$.

3.2 Integrování racionální lomené funkce

Racionální lomená funkce — funkce tvaru $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$, kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Ryze racionální lomená funkce — racionální lomená funkce, kde $n < m$.

Parciální zlomky — zlomky typu $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $A, a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$ nebo $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, kde x^2+px+q je nerozložitelný kvadratický polynom, čísla $M, N, p, q \in \mathbb{R}$ a n je přirozené číslo.

Rozklad na parciální zlomky — rozklad ryze racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků.

Poznámka. Integrál z ryze racionální lomené funkce počítáme tak, že racionální lomenou funkci nejdříve rozložíme na parciální zlomky a ty postupně integrujeme.

Příklad 3.2.1. *Rozložte funkci $f(x)$ na součet polynomu a ryze racinální lomené funkce:*

a) $f(x) = \dfrac{3x^3+x}{x^2+3x+5}$ b) $f(x) = \dfrac{5x^2-2x}{x^2-4x+2}$ c) $f(x) = \dfrac{4x^3+x+1}{2x+1}$

Řešení: a) Vypočítáme $(3x^3+x) : (x^2+3x+5) = 3x-9$ zbytek $13x+45$.

Potom $f(x) = \dfrac{3x^3+x}{x^2+3x+5} = \underline{\underline{3x-9+\dfrac{13x+45}{x^2+3x+5}}}$.

b) $(5x^2-2x) : (x^2-4x+2) = 5$ zbytek $18x-10$. Potom $f(x) = \underline{\underline{5+\dfrac{18x-10}{x^2-4x+2}}}$.

c) $f(x) = \dfrac{4x^3+x+1}{2x+1} = \underline{\underline{2x^2-x+1}}$.

Příklad 3.2.2. *Rozložte ryze racionální lomené funkce na parciální zlomky:*

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ b) $f(x) = \dfrac{8}{x^2+2x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-3x-1}{x^3+2x^2+x}$ e) $f(x) = \dfrac{4x^3-4x^2+x+1}{x^2(x-1)^2}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^4+x^3}$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)(x^2+1)}$ h) $f(x) = \dfrac{2x^2-4}{x^3+4x^2+2x}$ j) $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2(x^2+4)}$

Řešení: a) Rozložíme jmenovatel na součin $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$. Dostali jsme dva činitele, ke každému z nich přiřadíme jeden parciální zlomek.

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$$

Teď zbývá vypočítat konstanty A a B. Upravujeme rovnici tak, že nejdřív se zbavíme zlomku, potom roznásobíme a sečteme pravou stranu.

$$\frac{x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} \quad \Big/ \cdot (x+2)(x+1)$$

$$x + 3 = A(x + 1) + B(x + 2)$$

$$x + 3 = Ax + A + Bx + 2B$$

Dostali jsme rovnici typu polynom se rovná polynomu. Porovnáme koeficienty u stejných mocnin na obou stranách rovnice.

$$\begin{array}{rcccr} x^1: & 1 & = & A+B \\ x^0: & 3 & = & A+2B \end{array} \;\Rightarrow\; A = 1-B \;\Rightarrow\; 3 = 1-B+2B \;\Rightarrow\; A = -1,\ B = 2$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+1}}}.$$

b) $\dfrac{8}{x^2+2x-3} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x+3}$; c) $\dfrac{2x}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$.

d) Jmenovatel $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2 = x(x + 1)(x + 1)$. Máme tři činitele, přitom dvakrát stejný dvojčlen $x + 1$. Musíme v rozkladu mít 3 různé parciální zlomky, tzn. pro dva stejné činitele dva různé zlomky.

$$f(x) = \frac{x^2-3x-1}{x^3+2x^2+x} = \frac{x^2-3x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Dále spočítáme koeficienty stejně jako v části a). Dostaneme

$$f(x) = \frac{x^2-3x-1}{x^3+2x^2+x} = \underline{\underline{-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}}}.$$

e) $\dfrac{4x^3-4x^2+x+1}{x^2(x-1)^2} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$;

f) $\dfrac{x^2-3}{x^4+x^3} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}$.

g) Jmenovatel $(x-2)(x^2+1)$ se už nedá dál rozložit v reálném oboru. Máme dva činitele, a tak dva parciální zlomky. Výraz x^2+1 je nerozložitelný kvadratický polynom. Proto

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Dále spočítáme koeficienty stejně jako v části a). Dostaneme

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x^2+1)} = \underline{\underline{\frac{\frac{3}{5}}{x-2} + \frac{-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}}{x^2+1}}}.$$

h) $\dfrac{2x^2-4}{x^3+4x^2+2x} = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{4x+8}{x^2+4x+2}$; j) $\dfrac{4x-3}{x^2(x^2+4)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\frac{3}{4}}{x^2} + \dfrac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+4}$.

Příklad 3.2.3. *Integrujte parciální zlomky:*

a) $\displaystyle\int \frac{3}{x+2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{8}{2x-3}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{3}}{x+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+4)^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: a) $\displaystyle\int \frac{3}{x+2}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{(x+2)'}{x+2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{3\ln|x+2|+C}}.$

b) $\displaystyle\int \frac{8}{2x-3}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{2}{2x-3}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{(2x-3)'}{2x-3}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{4\ln|2x-3|+C}}.$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{-1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-2\ln|1-x|+C}}.$

d) $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{3}}{x+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln|x+\sqrt{2}|+C}}.$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} t & = x-1 \\ \mathrm{d}t & = \mathrm{d}x \end{array} \right| = 4\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{t} = \underline{\underline{-\frac{4}{x-1}+C}}.$

f) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+4)^4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} t & = x+4 \\ \mathrm{d}t & = \mathrm{d}x \end{array} \right| = 3\int t^{-4}\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{3t^3} = \underline{\underline{-\frac{1}{(x+4)^3}+C}}.$

Příklad 3.2.4. *Integrujte parciální zlomky:*

a) $\displaystyle\int \frac{6x+3}{x^2+x+7}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{6}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{4-x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-3x+3}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Všechny parciální zlomky v tomto příkladě jsou typu $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, kde x^2+px+q je nerozložitelný kvadratický polynom.
Pokud je $M \neq 0$ (čitatel zlomku obsahuje x), nejdříve upravíme zlomek tak, aby v čitateli byla derivace jmenovatele a použíjeme na výpočet tohoto integrálu vzorec $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$. Zbylý integrál je typu $\dfrac{N}{x^2+px+q}$.
Ve jmenovateli tohoto integrálu kvadratický člen doplníme na úplný čtverec a substitucí převedem integrál na vzorec $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, nebo rovnou použijeme vzorec $\displaystyle\int \frac{1}{(x+b)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} + C$.

a) $$\int \frac{6x+3}{x^2+x+7}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x+1}{x^2+x+7}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{(x^2+x+7)'}{x^2+x+7}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \underline{\underline{3\ln|x^2+x+7| + C}}.$$

b) $$\int \frac{6}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{x^2-4x+4+4}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\begin{array}{rcl} t &=& x-2 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}x \end{array}\right| = 6\int \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \underline{\underline{3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C}}.$$

c) $$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{-4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| -$$
$$-2\int \frac{1}{x^2+4x+4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| - 2\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| - 2\operatorname{arctg}(x+2) + C}}.$$

d) $$\int \frac{4x-3}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x-\frac{3}{2}}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x+6-6-\frac{3}{2}}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\int \frac{2x+6-\frac{15}{2}}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{-\frac{15}{2}}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\ln|x^2+6x+10| - 15\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x^2+6x+10| -$$
$$-15\int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{2\ln|x^2+6x+10| - 15\operatorname{arctg}(x+3) + C}}.$$

$$\text{e)} \int \frac{4-x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-10}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| +$$

$$+ 5\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.}}$$

$$\text{f)} \int \frac{3}{x^2-3x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.}}$$

Příklad 3.2.5. *Vypočtěte integrály z racionální lomené funkce:*

a) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{13\,x^2}{(x^2+4)(x-3)}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{x-10}{x^3-4x^2+5x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{4x-9}{x^3+6x^2+9x}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{4-3x}{x^5+x^3}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{x^3+5}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: a) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+3}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2|+3\ln|x+3|+C;$

$$\text{b)}\int \frac{13\,x^2}{(x^2+4)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{9}{x-3}+\frac{4x+12}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = 9\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x +$$

$$+12\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = 9\ln|x-3| + 2\ln|x^2+4| + 6\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C;$$

$$\text{c)}\int \frac{x-10}{x^3-4x^2+5x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x-7}{x^2-4x+5} - \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x +$$

$$+\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x - 2\ln|x| = 2\ln\left|x^2-4x+5\right| - 2\ln|x| + \operatorname{arctg}(x-2) + C;$$

$$\text{d)}\int \frac{4x-9}{x^3+6x^2+9x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+3} + \frac{7}{(x+3)^2} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{7}{x+3} + C;$$

$$\text{e)}\int \frac{4-3x}{x^5+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{4x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 4\ln|x| + 2\ln(x^2+4) +$$

$$+3\operatorname{arctg} x + C;$$

$$\text{f)}\int \frac{x^3+5}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int x + 3 + \frac{13}{x-2} - \frac{6}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 3x + 13\ln|x-2| -$$

$$-6\ln|x-1| + C.$$

3.3 Určitý integrál

Newton – Leibnitzův vzorec — nechť $F'(x) = f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Per partes pro určitý integrál — $\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x.$

Substituce pro určitý integrál — $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ \mathrm{d}t$ kde $t = \varphi(x)$.

Linearita určitého integrálu — funkce f, g spojité na $< a, b >$ a $M, N \in \mathbb{R}$, potom

$$\int_a^b (Mf(x) + Ng(x))\ \mathrm{d}x = M\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + N\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Aditivnost určitého integrálu — funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $c \in (a, b)$, pak

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Příklad 3.3.1. *Užitím Newton – Leibnitzova vzorce vypočtěte:*

a) $\displaystyle\int_0^1 (2x - x^2)\ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\ \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ \mathrm{d}x$

Řešení: a) Nejdřív spočítáme primitivní funkci k funkci $f(x) = (2x - x^2)$.

$F(x) = \int(2x - x^2)\ \mathrm{d}x = x^2 - \frac{x^3}{3} + C$. Podle Newton – Leibnitzova vzorce

$$\int_0^1 (2x - x^2)\ \mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + C\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3} + C\right) - C = \frac{2}{3} + C - C = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

Vidíme, že integrační konstantu C při výpočtu určitého integrálu v bodě b přičteme a v bodě a zase odečteme, proto ji nemusíme psát.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = \underline{\underline{2}}.$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}.$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ \mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}.$

Příklad 3.3.2. *Vypočtěte integrál* $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-1| \ dx.$

Řešení: Pro funkci, kterou chceme integrovat platí: $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{pro } x \in <1,\infty), \\ 1-x, & \text{pro } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$

Využijeme aditivnost určitého integrálu:

$$\int_{-1}^{3} |x-1| \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x-1| \ \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} |x-1| \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x) \ \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} (x-1) \ \mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{3} = \underline{\underline{4}}.$$

Příklad 3.3.3. *Užitím Newton – Leibnitzova vzorce vypočtěte určité integrály:*

a) $\displaystyle\int_{1}^{4} (3x-11) \ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2x-3} \ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{0}^{3} |1-3x| \ \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x$

Řešení: a) $-\dfrac{21}{2}$; b) $-\dfrac{1}{2}\ln 3$; c) $\dfrac{65}{6}$; d) $e - \dfrac{1}{e}$.

Příklad 3.3.4. *Metodou per partes vypočtěte integrály:*

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} (3x-2)\,\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{1}^{e} x \ln x \ \mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$

Řešení: a) $\displaystyle\int_{0}^{1} (3x-2)\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \Big[(3x-2)\,\mathrm{e}^x\Big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 3\,\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x =$

$= (e-(-2)) - \Big[3\,\mathrm{e}^x\Big]_{0}^{1} = e + 2 - (3e-3) = \underline{\underline{5-2e}}.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \ \mathrm{d}x = \Big[-x \cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \ \mathrm{d}x = \Big(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\Big) +$

$\displaystyle+\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \underline{\underline{1}}.$

c) $\displaystyle\int_{1}^{e} x \ln x \ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} \frac{x}{2} \ \mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}\ln e - 0\right) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{1}^{e} = \underline{\underline{\frac{1+\mathrm{e}^2}{4}}}.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \Big[x \operatorname{arctg} x\Big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} 1 - \left[\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_{0}^{1} =$

$\displaystyle= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}\ln 2 - 0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}}}.$

Příklad 3.3.5. *Použijte substituční metodu na výpočet následujících integrálů:*

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{(2x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$

Řešení: a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 1+\sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_1^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}}.$$

b) $$\int_0^{\pi} \sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\pi \Rightarrow t=0 \end{array} \right| = \Big[t\Big]_0^0 = \underline{\underline{0}}.$$

c) $$\int_0^{1} \frac{x}{(2x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x}{(2x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 2x^2+1 = t \\ 4x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=3 \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int_1^3 t^{-3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[t^{-2}\right]_1^3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}-1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}.$$

Příklad 3.3.6. *Vypočítejte* $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\;dx$.

Řešení: Použijeme vzorec $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$. Dosadíme do integrálu.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

Příklad 3.3.7. *Vypočítejte určité integrály:*

a) $\displaystyle\int_0^2 (1+x^3)^2\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^2 (1+x^3)^2\,x^2\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$

Řešení: a) $\dfrac{198}{7}$; b) $\dfrac{728}{9}$; c) $2\ln 2 - 1$.

3.4 Nevlastní integrál

Nevlastní integrál 1. typu — $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ nebo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Nevlastní integrál 2. typu — integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ z neomezené funkce na (a,b).

Výpočet nevlastního integrálu — Nechť je f integrovatelná na intervalu $\langle a,t\rangle$ pro

1.) každé $t>a$ a existuje limita $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = I.$

Potom nevlastní integrál se rovná této limitě: $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$

2.) každé $a<t<b$, funkce $f(x)$ neohraničená v okolí bodu b a existuje limita $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x = I.$ Potom nevlastní integrál z neohraničené funkce se rovná této limitě: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x.$

Nevlastní integrál je konvergentní — pokud limita I je konečné číslo.

Nevlastní integrál je divergentní — pokud limita I v definici nevlastního integrálu se rovná plus nebo minus nekonečno, nebo když tato limita neexistuje.

Poznámka. Podobně můžeme definovat nevlastní integrál typu $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ nebo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$ kde funkce $f(x)$ neohraničená v okolí bodu a.

Příklad 3.4.1. *Vypočítejte následující nevlastní integrály:*

$$\text{a)}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\qquad \text{b)}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\qquad \text{c)}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x\qquad \text{d)}\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x\qquad \text{e)}\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: a) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty}\Big(\ln t - 0\Big) = \infty \Rightarrow$ integrál $\underline{\underline{\text{diverguje}}}$.

$$\text{b)}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty}\Big(-\frac{1}{t}+1\Big) = \underline{\underline{1}}.$$

$$\text{c)}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\Big[\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$

$$\text{d)}\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c}\ln x\ =\ u\\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\ =\ \mathrm{d}u\\ x=2\ \Rightarrow\ u=\ln 2\\ x=t\ \Rightarrow\ u=\ln t\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2}}}.$$

$$\text{e)} \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{-x} & u = -\mathrm{e}^{-x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x}(x+1)\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty} \Big(-\mathrm{e}^{-t}(t+1)+1\Big) = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{t+1}{\mathrm{e}^t} = \underline{\underline{1}}.$$

Příklad 3.4.2. *Vypočítejte nevlastní integrály:*

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{4} \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-4} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_t^{-4} =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{x^2}\right]_t^{-4} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{t^2}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{32}}}.$$

$$\text{b)} \int_{-\infty}^{4} \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_t^4 \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right]_t^4 =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{t\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{t}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{16}\pi}}.$$

$$\text{c)} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x}\right]_t^0 = \frac{1}{6}\lim_{t\to-\infty} \Big(1-\mathrm{e}^{6t}\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$

Příklad 3.4.3. *Vypočítejte nevlastní integrál* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Vybereme si libovolný bod, například nulu, a interval $(-\infty,\infty)$ bodem 0 rozdělíme na dva intervaly a tak i integrál na dva nevlastní integrály:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_t^0 + \lim_{t\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \Big(0 - \operatorname{arctg} t\Big) + \lim_{t\to\infty} \Big(\operatorname{arctg} t - 0\Big) = -\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}.$$

Příklad 3.4.4. *Vypočítejte následující integrály z neomezené funkce:*

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_{-1}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e)} \int_1^3 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: a) Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je neohraničená v okolí nuly, proto počítáme:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \Big[\ln x\Big]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \Big(0 - \ln t\Big) = \infty \ \Rightarrow \underline{\underline{\text{diverguje}}}.$$

b) Funkce $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ je neohraničená v okolí nuly. Proto:

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^t 2\,x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^-} \Big[3\,x^{\frac{2}{3}}\Big]_{-1}^t = \lim_{t\to 0^-} \Big(3\sqrt[3]{t^2} - 3\Big) = \underline{\underline{-3}}.$$

c) Funkce $f(x) = x\ln x$ je neohraničená v okolí nuly. Integrál počítáme metodou per partes.

$$\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{t^2}{2}\ln t - \left[\frac{x^2}{4}\right]_t^1\right) = \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} t^2\ln t = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{t^{-2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-2t^{-3}} =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} -\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}.$$

d) Víme, že $\cos 0 = 1$. Proto funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ je neohraničená v okolí nuly. Integrál počítáme substituční metodou.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 1-\cos x \ = \ u \\ \sin x\,\mathrm{d}x \ = \ \mathrm{d}u \\ x = t \ \Rightarrow \ u = 1-\cos t \\ x = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ u = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \int_{1-\cos t}^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \lim_{t\to 0^+} \int_{1-\cos t}^1 u^{-\frac{1}{2}} = \lim_{t\to 0^+} \Big[2\sqrt{u}\Big]_{1-\cos t}^1 =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \Big(2\sqrt{1} - 2\sqrt{1-\cos t}\Big) = \underline{\underline{2}}.$$

e) Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ je neohraničená v okolí bodu $x = 2$, který leží v intervalu $(1,3)$. Integrál proto musíme rozdělit na dva nevlastní integrály.

$$\int_1^3 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \int_1^t \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 2^+} \int_t^3 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \Big[\ln|x-2|\Big]_1^t + \lim_{t\to 2^+} \Big[\ln|x-2|\Big]_t^3 =$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \Big(\ln|t-2| - \ln 1\Big) + \lim_{t\to 2^+} \Big(\ln 1 - \ln|t-2|\Big) =$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \ln|t-2| + \lim_{t\to 2^+} \Big(-\ln|t-2|\Big)$$

Obě limity jsou nevlastní, a proto integrál $\underline{\underline{\text{diverguje}}}$.

Příklad 3.4.5. *Vypočítejte následující nevlastní integrály:*

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: a) diverguje; b) 2; c) $\dfrac{\pi}{4}$; d) $-\dfrac{1}{4}$; e) diverguje.

Příklad 3.4.6. *Proud v elektrickém obvodu je dán vztahem* $i(t) = t\,e^{-4t}$. *Určete celkový náboj* $Q = \displaystyle\int_0^\infty i(t)\,dt$.

Řešení: $Q = \dfrac{1}{16}$.

4 Řady

4.1 Nekonečná geometrická řada

Nekonečná posloupnost — funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Nekonečná řada — součet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná posloupnost.

Konvergentní řada — řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$.

Jinými slovy součet konvergentní řady je konečný. Píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Divergentní řada — řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pro kterou součet $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ neexistuje nebo je nekonečný.

Geometrická posloupnost — posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ a reálné číslo $q \neq 0$, které se nazývá kvocient geometrické posloupnosti. V geometrické posloupnosti platí, že $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti — a) pro $q = 1$ je $S_n = n \cdot a_1$.
b) pro $q \neq 1$ je $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Geometrická řada — řada vytvořená z geometrické posloupnosti, tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$.

Součet konvergentní geometrické řady — geometrická řada s kvocientem q, $|q| < 1$, je konvergentní a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Příklad 4.1.1. *Sečtěte geometrickou řadu* $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dots$

Řešení: a) $a_1 = 1$, $q = \dfrac{a_2}{a_1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $|q| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, řada konverguje a

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{2-\sqrt{2}.}}$$

Příklad 4.1.2. *Sečtěte geometrickou řadu* $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos x)^{2n} = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots$

Řešení: $a_1 = 1$, $q = \cos^2 x$. Pro $|\cos^2 x| < 1$, tedy $x \neq k\pi$ je řada konvergentní a

$$S = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\sin^2 x}}}.$$

Příklad 4.1.3. *Sečtěte geometrické řady:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty}(x-3)^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}$

Řešení: a) $S = 2$; b) $S = 3$; c) $S = \frac{3}{4}$; d) $S = \frac{(x-3)^2}{4-x}$, $x \in (2, 4)$;

e) $S = \frac{1}{x+1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Příklad 4.1.4. *Řešte rovnici* $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \dots$.

Řešení: Pravá strana rovnice je geometrická řada, $a_1 = 1$, $q = -\frac{3}{x}$.

Pro $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ je řada konvergentní se součtem $S = \frac{x}{x+3}$.

Máme řešit rovnici $\frac{8}{x+10} = \frac{x}{x+3}$ na množině $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 + 2x - 24 = 0$. Řešením je $\underline{\underline{x \in \{-6, 4\}}}$.

Příklad 4.1.5. *Pro* $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ *řešte rovnici* $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \dots = 2\,\mathrm{tg}\, x$.

Řešení: $x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-\sin^2 x} = 2\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}}}$.

Příklad 4.1.6. *Vyřešte v* $\mathbb{R}$ *následující rovnice:*

a) $\sum_{n=2}^{\infty}(x+1)^n = -x$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n = \frac{1}{2}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+5}{2}\right)^n = x$ d) $\sum_{n=2}^{\infty}(x-2)^n = \frac{4}{3}$

Řešení: a) $x = -\frac{1}{2}$; b) $x = -\frac{5}{2}$; c) nemá řešení; d) $\frac{8}{3}$.

4.2 Konvergence číselné řady

Absolutní konvergence — Číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pokud je konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Neabsolutní konvergence — Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Nutná podmínka konvergence číselné řady — Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, potom je nutně $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Řada s nezápornými členy — řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Podílové kritérium konvergence řady s nezápornými členy —

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy konverguje.

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy diverguje.

Odmocninové kritérium konvergence řady s nezápornými členy —

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy konverguje.

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy diverguje.

Integrální kritérium konvergence řady s nezápornými členy —

Funkce $f(x)$, $x \in \langle 1, \infty)$ je nezáporná a nerostoucí a navíc $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Srovnávací kritérium — Nechť $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ a $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Je-li konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom je konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li divergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom je divergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Alternující řada — řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Leibnitzovo kritérium konvergence alternující řady — Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ je konvergentní, pokud je posloupnost $\big(a_n\big)_{n=1}^{\infty}$ klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad 4.2.1. *Vyšetřete konvergenci následujících číselých řad s nezápornými členy:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+3n}{2+5n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$

Řešení: a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4+3n}{2+5n} = \frac{3}{5} \neq 0$. Není splněna nutná podmínka konvergence, řada diverguje.

b) Ověříme nutnou podmínku konvergence: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^n = \infty \neq 0 \Rightarrow$ diverguje.

c) Použijeme odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right) = \frac{2}{3} < 1 \quad\Rightarrow\quad \text{řada konverguje.}$$

d) Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\,\frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n!\,3^n}{3^n\,3\;n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3} = \infty > 1 \;\Rightarrow\; \text{diverguje.}$$

Příklad 4.2.2. *Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci následujících řad:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+16}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Řešení: a) Zvolíme si funkci $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Tato funkce je klesající a platí, že $f(n) = \dfrac{\ln n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Vypočítáme si nevlastní integrál:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c}\ln x = t\\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ x=1 \Rightarrow t=0\\ x=A \Rightarrow t=\ln A\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_0^{\ln A} t\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\ln A} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\left(\ln^2 A - 0\right) = \infty.$$

Integrál diverguje, tedy i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ diverguje.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}; \quad f(n) = \dfrac{1}{n \ln n}, \quad n = 2, 3 \ldots$

Potom $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle= \lim_{A\to\infty} \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^A = \lim_{A\to\infty} \ln|\ln A| - \ln|\ln 2| = \infty \Rightarrow$ řada diverguje.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$. Potom $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle= \lim_{A\to\infty} \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_1^A = \lim_{A\to\infty} \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^A =$

$\displaystyle= \lim_{A\to\infty} \ln\left|\frac{A}{A+1}\right| - \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2^{-1} = \ln 2 < \infty \Rightarrow$ řada konverguje.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+16}$. Potom $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right]_1^A = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) < \infty$

$\Rightarrow$ řada konverguje.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Potom $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^A =$

$\displaystyle= \lim_{A\to\infty} \ln A - \ln 1 = \infty \Rightarrow$ řada diverguje.

Příklad 4.2.3. *Pomocí srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci následujících řad:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\ln n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)3^n}$

Řešení: a) Platí, že $\sqrt{n} \le n$, $n = 1, 2, \ldots$, takže $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ge \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Víme, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ je divergentní, tedy i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje.

b) $n^n \ge 2^n$, $n = 2, 3, \ldots \Rightarrow \dfrac{1}{2^n} \ge \dfrac{1}{n^n}$, $n = 2, 3 \ldots$. Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}$ je konvergentní geometrická řada, tudíž je i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}$ konvergentní.

c) $\ln n \le n \Rightarrow \dfrac{1}{\ln n} \ge \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow$ řada $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\ln n}$ diverguje.

d) $(n+1)3^n \geq 3^n, \;\; n = 1, 2, \dots \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{1}{3^n} \geq \dfrac{1}{(n+1)3^n}, \;\; n = 1, 2 \dots.$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konverguje, tedy $\underline{\underline{\text{konverguje}}}$ i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

Příklad 4.2.4. *Rozhodněte o konvergenci následujících alternujících řad:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{9n-5}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^2}$

Řešení: a) Posloupnost $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Podle Leibnitzova kritéria řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ $\underline{\underline{\text{konverguje}}}$.

b) Posloupnost $\displaystyle\left(\frac{3n}{9n-5}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{9n-5} = \frac{1}{3} \neq 0$.

Podle Leibnitzova kritéria řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ $\underline{\underline{\text{diverguje}}}$.

c) Posloupnost $\displaystyle\left(\frac{1}{(n+4)^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+4)^2} = 0$. Takže řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^2}$ $\underline{\underline{\text{konverguje}}}$.

Příklad 4.2.5. *Rozhodněte o absolutní konvergenci následujících řad:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

Řešení: a) Řada je alternující a podle předchozího příkladu je konvergentní.

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje dle integrálního kritéria.

Takže řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ $\underline{\underline{\text{konverguje neabsolutně}}}$.

b) Posloupnost $\displaystyle\left(\frac{n+1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ klesající a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Podle Leibnitzova kritéria řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}$ diverguje, proto nemůže konvergovat ani řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n+1}{2n}\right|$. Řada $\underline{\underline{\text{diverguje}}}$.

c) Posloupnost $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$ konverguje podle Leibnitzova kritéria.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ konverguje podle integrálního kritéria.

To znamená, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$ konverguje absolutně.

Příklad 4.2.6. *Rozhodněte o konvergenci následujících řad:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5n-3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^{2n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5n+1}{2n-3}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{4^n}$

Řešení: a) diverguje; b) konverguje; c) diverguje; d) diverguje; e) konverguje.

4.3 Mocninné řady

Mocninná řada se středem v bodě x_0 — řada tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-x_0)^n, \quad x\in\mathbb{R}.$

Obor konvergence mocninné řady — množina všech x, pro která mocninná řada konverguje.

Poloměr konvergence mocninné řady se středem v bodě x_0 — reálné číslo r

takové, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots$

konverguje absolutně pro všechna $x\in(x_0-r,x_0+r)$ a diverguje pro všechna $x\in(-\infty,x_0-r)\cup(x_0+r,\infty)$.

Vzorec pro výpočet poloměru konvergence mocninné řady — $r=\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$

Poznámka. Ve vzorci na výpočet poloměru konvergence mocninné řady je horní limita, limsup, která se dá nahradit obyčejnou limitou v případě, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Poznámka. Pokud $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$, mocninná řada konverguje pouze v bodě x_0.

Pokud $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, mocninná řada konverguje pro každé $x\in\mathbb{R}$.

Příklad 4.3.1. *Mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n$ *má poloměr konvergence* 2. *Rozhodněte o konvergenci řady v bodech* $x = 0, \quad x = -1, \quad x = -2, \quad x = -3, \quad x = -6$.

Řešení: Střed řady je -3 a poloměr 2. Potom řada konvedguje na množině $(-3-2, -3+2) = (-5, -1)$. Body $x = -2$ a $x = -3$ leží unvitř tohoto intervalu, a proto řada konverguje v bodech $x = -2$ a $x = -3$.

Bod $x = -1$ leží na hranici intervalu, a proto o konvergenci v tomto bodě bez znalosti koeficientů a_n nelze rozhodnout.

Body $x = 0$ a $x = -6$ leží mimo interval $\langle -5, -1 \rangle$, mimo obor konvergence, proto řada diverguje v bodech $x = 0$ a $x = -6$.

Příklad 4.3.2. *Je dána mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$. *Víme, že řada konverguje pro* $x = 3$ *a diverguje pro* $x = 4$. *Rozhodněte o konvergenci řady v bodech* $x = -3, \quad x = 0, \quad x = 1, \ x = 2$ *a* $x = 5$.

Řešení: Řada konverguje na $(1-r, 1+r)$. Víme, že bod $x = 3$ leží uvnitř nebo na hranici tohoto intervalu a podobně bod $x = 4$ leží na hranici nebo mimo tento interval. Z toho plyne, že poloměr konvergence $r \in \langle 2, 3 \rangle$.

Potom řada s jistotou konverguje v bodech $x = 0, x = 1$ a $x = 2$ a s jistotou diverguje v bodech $x = -3$ a $x = 5$.

Příklad 4.3.3. *Určete obor konvergence mocninné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\, 3^n}$.

Řešení: Střed řady je -1 a poloměr r si vypočítáme podle vzorce.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\, 3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\, 3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 3.$$

Řada konverguje absolutně na $(-4, 2)$ a diverguje na $x \in (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$.

O konvergenci v bodech $x = -4$ a $x = 2$ rozhodneme dosazením. Pro $x = -4$ máme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\, 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n\, 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Dostali jsme alternujíci řadu, která je konvergentní (podle Leibnitzova kritéria z předchozí kapitoly).

Podobně pro $x = 2$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\, 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která je divergentní (integrální kritérium). Z toho plyne, že mocninná řada diverguje pro $x = 2$.

Oborem konvergence této mocninné řady je tedy množina $\langle -4, 2)$.

Příklad 4.3.4. *Určete obor konvergence mocninné řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ *se středem v* 0.

Řešení: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M = \{0\}}}.$

Příklad 4.3.5. *Mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-2)^n$ *má poloměr konvergence* 3. *Rozhodněte o konvergenci řady v bodech* $x = 0, \quad x = -1, \quad x = -2, \quad x = 2.$

Řešení: Konverguje v bodech $x = 0$ a $x = 2$, diverguje v bodě $x = -2$ a v bodě $x = -1$ nelze rozhodnout o konvergenci.

Příklad 4.3.6. *Určete obor konvergence mocninné řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n\,2^n}$.

Řešení: $M = \langle 0, 4).$

Příklad 4.3.7. *Určete obor konvergence mocninné řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *se středem v* 0.

Řešení: $(-1, 1).$

Reference

[1] Eliaš, J., Horváth J., Kajan J., Škulka R.: Zbierka úloh z vyššej matematiky IV, Bratislava, Nakladateľstvo Alfa, 1970.

[2] Krupková V., Fuchs, P.: Matematika I, Brno, Ediční středisko VUT, 2009.

[3] Mendelson, E.: 3000 Solved Problems in Calculus, City University of New York, 2008.

[4] Tomica, R.: Cvičení z matematiky I., Vojenská Akademie Brno, 1974.